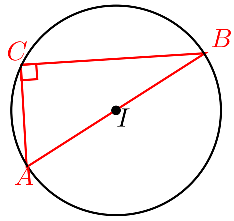
Objectifs

- Caractériser le triangle rectangle par son inscription dans un demi-cercle dont le diamètre est un côté du triangle.
- Caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit.

1 Sens direct

Théorème

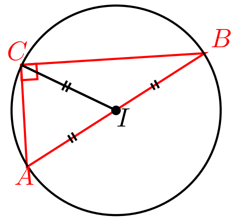
Si un triangle est rectangle, **alors** le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.



Démonstration : *Soit ABC un triangle rectangle en C. I est le milieu de $[AB]$. Soit M le symétrique de C par rapport à I. Par symétrie, I est le milieu des diagonales du quadrilatère $ACBM$. Il s'agit donc d'un parallélogramme. Comme il a un angle droit, $ACBM$ est un rectangle. On en déduit que les diagonales $[AB]$ et $[CM]$ sont de même longueur et que les segments, $[IA]$, $[IB]$, $[IM]$ et $[IN]$ sont de même longueur. Il existe donc un cercle de centre I et de rayon $[IA]$ qui passe par les points A, B, M et C. Le cercle circonscrit à ACB a donc pour centre I et pour diamètre $[AB]$.* ■

Propriété

- Si un triangle est rectangle, son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit. Le rayon du cercle circonscrit est donc égal à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.
- La médiane issue de l'angle droit du triangle rectangle est égale à la moitié de l'hypoténuse.



2 Sens réciproque

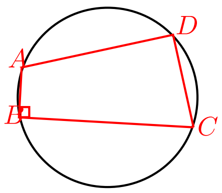
Théorème

Si un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre un de ses côtés, **alors** ce triangle est rectangle.

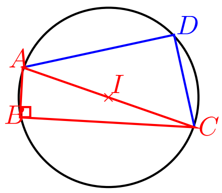
Propriété

Si le milieu d'un côté d'un triangle est équidistant des trois sommets, alors ce triangle est rectangle.

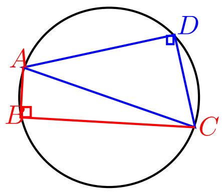
Exemple : A, B, C et D sont quatre points distincts d'un cercle $\mathcal{C}$ avec $\widehat{ABC} = 90°$. Démontrer que $\widehat{ADC} = 90°$.



$\widehat{ABC} = 90°$ donc, le triangle ABC est rectangle en B.



B appartient ainsi au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AC]$



or, le ponit D appartient aussi au cercle de diamètre $[AC]$ donc, le triangle ADC est rectangle en D et $\widehat{ADC} = 90°$.