Objectifs

- Comparer deux nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire, en particulier connaître et utiliser :
  - l'équivalence entre $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $ad = bc$ (b et d étant non nuls) ;
  - l'équivalence entre $a = b$ et $a - b = 0$;
  - l'équivalence entre $a > b$ et $a - b > 0$.
- Utiliser le fait que des nombres relatifs de l'une des deux formes suivantes sont rangés dans le même ordre que a et b : $a+c$ et $b+c$; $a - c$ et $b - c$.
- Utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ac et bc sont dans le même ordre (respectivement l'ordre inverse) que a et b si c est strictement positif (respectivement négatif).

1 Comparaison

a. Définition

Définition

En graduant une droite avec les nombres négatifs vers la gauche et les nombres positifs vers la droite, on dit qu'un nombre est plus grand qu'un autre s'il est situé plus à droite que l'autre.

Règle

Pour comparer deux nombres relatifs a et b, on peut étudier le signe de $a - b$:
- si $a - b > 0$, cela signifie que $a > b$;
- si $a - b = 0$, cela signifie que $a = b$;
- si $a - b < 0$, cela signifie que $a < b$.

b. Comparaison de fractions

b.1 Calculer la valeur approchée des quotients

Exemple : Comparer $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{9}$.

$\frac{2}{3} = 2 \div 3 \approx 0,66\cdots$

$\frac{5}{9} = 5 \div 9 \approx 0,55\cdots$

$0,66\cdots$ est plus grand que $0,55\cdots$ donc, $\frac{2}{3}$ est plus grand que $\frac{5}{9}$.

b.2 Comparer de fractions ayant le même dénominateur

Règle

Pour comparer deux fractions ayant toutes le même dénominateur, il suffit de comparer les numérateurs.

Exemple : Comparer $\frac{11}{13}; \frac{2}{13}; \frac{18}{13}; \frac{9}{13}$.

$2 < 9 < 11 < 18$ donc, on en déduit que $\frac{2}{13} < \frac{9}{13} < \frac{11}{13} < \frac{18}{13}$.

b.3 Comparaison de fractions n'ayant pas le même dénominateur

Règle

Pour comparer deux fractions n'ayant pas le même dénominateur, on peut les réduire au même dénominateur.

Exemple : Comparer $\frac{5}{6}$ et $\frac{7}{9}$.
$\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$ et $\frac{7}{9} = \frac{14}{18}$. Comme $\frac{15}{18}$ est plus grand que $\frac{14}{18}$, alors $\frac{5}{6}$ est plus grand que $\frac{7}{9}$.

2 Effet de l'addition sur l'ordre

Théorème

Si deux nombres a et b sont tels que $a < b$ alors pour tout nombre c, on a

$$a + c < b + c \qquad \text{et} \qquad a - c < b - c$$

Exemple : Si $x - 8 < 5$, alors on a aussi $x - 8 + 8 < 5 + 8$, c'est à dire $x < 13$.
Si $x + 2 < 7$, alors on a aussi $x + 2 - 2 < 7 - 2$, c'est à dire $x < 5$.

Théorème

Si deux nombres a et b sont tels que $a > b$ alors pour tout nombre c, on a

$$a + c > b + c \qquad \text{et} \qquad a - c > b - c$$

Exemple : Si $-3 + x > 4$, alors on a aussi $-3 + x + 3 > 4 + 3$, c'est à dire $x > 7$.
Si $x + 7 > 12$, alors on a aussi $x + 7 - 7 > 12 - 7$, c'est à dire $x > 5$.

3 Effet de la multiplication sur l'ordre

Théorème

Si deux nombres a et b sont tels que $a < b$ alors pour tout nombre c strictement positif ($c > 0$), on a

$$a \times c < b \times c$$

Exemple : Si un nombre x est tel que $x > 5$, alors $3 \times x > 3 \times 5$, c'est à dire $3x > 15$.

Remarque : Il est important que le nombre que l'on multiplie de chaque côté de l'égalité soit positif.
En multipliant par un nombre négatif, on inverse le sens de l'inégalité :
$5 > 3$ mais si on multiplie par -1, on obtient $-5 < -3$.