

## Objectifs

- Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.

## 1 Définition et rappels

### a. Règles

#### Définition (Équation)

Une équation est une égalité de deux expressions où apparaissent des inconnues désignées par des lettres. Chaque membre de l'égalité est aussi appelé membre de l'équation. Résoudre l'équation, c'est trouver toutes les valeurs possibles pour l'inconnue.

★ Exemple : L'équation  $x + 3 \times x = 20$  admet 5 pour solution car  $5 + 3 \times 5 = 20$ .

#### Règle

Dans une équation, on ne change pas les solutions en ajoutant ou en soustrayant un même nombre à chaque membre.

★ Exemple : L'équation  $4x + 6 = x - 3$  a les mêmes solutions que l'équation  $4x + 6 + 5 = x - 3 + 5$  ou que l'équation  $4x + 6 - 2x = x - 3 - 2x \dots$

#### Règle

Dans une équation, on ne change pas les solutions en multipliant ou en divisant chaque membre par un même nombre non nul.

★ Exemple : L'équation  $2x = 8 - 5x$  a les mêmes solutions que l'équation  $2x \div 2 = (8 - 5x) \div 2$ .

## 2 L'équation $a \times x + b = 0$

#### Théorème

L'équation  $ax + b = 0$  avec  $a \neq 0$  a une seule solution :

$$x = -b \div a = -\frac{b}{a}.$$

*Démonstration* : On soustrait  $b$  de chaque côté de l'égalité :  $ax + b - b = 0 - b$  c'est à dire  $ax = -b$ ,  
On divise chaque membre par  $a$ , on obtient l'équation  $ax \div a = -b \div a$ , c'est à dire  $x = -b \div a$ . ■

★ Exemple : L'équation «  $4x - 8 = 0$  » a pour solution 2 :

$$\begin{aligned} 4x - 8 = 0 &\iff 4x - 8 + 8 = 0 + 8 \\ &\iff 4x = 8 \\ &\iff 4x \div 4 = 8 \div 4 \\ &\iff x = 2. \end{aligned}$$

### 3 Équation du type $ax + b = cx + d$

#### a. Cas général

##### Règle

Pour résoudre une équation du type  $ax + b = cx + d$ , on regroupe les termes « en  $x$  » d'un même côté de l'égalité et les nombres de l'autre côté.

★ Exemple : Résoudre l'équation  $5x + 4 = 2x - 5$ .

On regroupe les $x$ à gauche par soustraction de $2x$ à gauche et à droite	$5x + 4 - 2x = 2x - 5 - 2x$
On réduit les expressions obtenues	$3x + 4 = -5$
On regroupe les nombres à droite par soustraction de 4 à gauche et à droite	$3x + 4 - 4 = -5 - 4$
On réduit les expressions obtenues	$3x = -9$
On divise chaque membre de l'équation par 3	$3x \div 3 = (-9) \div 3$
On réduit les expressions obtenues	$x = -3$

On vérifie que  $-3$  est bien la solution :  $5 \times (-3) + 4 \stackrel{?}{=} 2 \times (-3) - 5$ .

#### b. Cas particuliers

Parfois, la résolution d'équations aboutit à des résultats particuliers.

★ Exemple : Résoudre l'équation  $5x + 3 = 5x - 6$  : en soustrayant  $5x$  dans chaque membre de l'équation on obtient  $3 = -6$ , ce qui est toujours faux. L'équation n'a donc pas de solution.

★ Exemple : Résoudre l'équation  $2 \times (x + 1) = 2x + 2$ . En divisant par 2 chaque membre de l'équation, on obtient  $x + 1 = \frac{2x+2}{2}$ , d'où  $x + 1 = x + 1$ .  
En soustrayant  $x$  dans chaque membre de l'équation, on obtient  $1 = 1$  qui est toujours vrai. L'équation  $2 \times (x + 1) = 2x + 2$  a donc une infinité de solution : tous les nombres conviennent pour  $x$ .

### 4 Résolution de problèmes

Certains problèmes peuvent être résolus grâce à une résolution d'équation. Plusieurs étapes sont nécessaires :

- choix de l'inconnue ;
- mise en équation du problème ;
- résolution de l'équation ;
- interprétation du résultat.

★ Exemple : Dans 5 ans, j'aurais deux fois l'âge que j'avais il y a 15 ans. Quel âge ai-je ?

- **Choix de l'inconnue** : l'âge que j'ai aujourd'hui :  $x$ ,  
mon âge il y a 15 ans :  $x - 15$ ,  
mon âge dans 5 ans :  $x + 5$ .
- **Mise en équation** :  $2 \times \boxed{\text{mon âge il y a 15 ans}} = \boxed{\text{mon âge dans 5 ans}}$ ,  
c'est à dire :  $2 \times (x - 15) = x + 5$  ou  $2x - 30 = x + 5$ .
- **Résolution de l'équation** : par soustraction de  $x$ , on obtient  $2x - 30 - x = x + 5 - x$ , c'est à dire  $x - 30 = 5$ .  
Par addition de 30, on obtient  $x - 30 + 30 = 5 + 30$  d'où  $\boxed{x = 35}$ .
- **Interprétation** :  $\boxed{\text{J'ai 35 ans}}$ .

★ Exemple : Trouver trois nombres consécutifs dont la somme est 153.

- **Choix de l'inconnue** : le premier de ces trois nombres :  $n$ ,  
le deuxième nombre est :  $n + 1$ ,  
le troisième nombre :  $n + 2$ .
- **Mise en équation** :  $(n) + (n + 1) + (n + 2) = 153$ , c'est à dire :  $n + n + 1 + n + 2 = 153$  ou  $3n + 3 = 153$ .
- **Résolution de l'équation** :  $3n + 3 - 3 = 153 - 3$  ou  $3n = 150$  donc  $n = 150 \div 3 = 50$ .
- **Interprétation du résultat** :  $50 + 51 + 52 = 153$