NOMBRES & CALCULS

20

Nombres premiers

Connaissances et compétences abordées

- Définition d'un nombre premier.
- Liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 30.
- Décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers.
- Simplifier une fraction pour la rendre irréductible.

ACTIVITÉ 1 Un peu de calcul mental !

Le but est de déterminer tous les nombres premiers inférieurs à 100 en utilisant le crible d'Ératosthène.

Objectifs : calculer des multiples ; suivre un algorithme ; déterminer des nombres premiers.

Phases à partir de la fiche LE CRIBLE D'ÉRATOSTHÈNE.

1) On barre le nombre 1 qui n'est pas un nombre premier, et on entoure 2 qui en est un. Tous les multiples de 2 ne sont pas des nombres premiers puisqu'ils sont divisibles par 2, on les barre donc tous.
2) On entoure 3 qui est un nombre premier et on barre tous les multiples de 3 qui ne sont pas des nombres premiers.
3) On réitère ainsi jusqu'à 10 qui est la racine carrée de 100.
4) On conclut en donnant une première signification des nombres premiers.

DÉBAT 2 Vidéo sur les nombres premiers

Vidéo des *Petits contes mathématiques* d'universcience : les nombres premiers.

Trace écrite

1. Nombres premiers

DÉFINITION : Nombre premier

Un entier naturel est un **nombre premier** s'il admet comme seuls diviseurs 1 et lui-même.

PROPRIÉTÉ : Nombres premiers inférieurs à 30

Les nombres premiers inférieurs à 30 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.

Exemple

23 et 49 sont-ils des nombres premiers ?

Correction

- 23 est un nombre premier car il est dans la liste des nombres premiers.
- 49 est divisible par 1 et par 49, mais aussi par 7. Donc, 49 n'est pas un nombre premier.

2. Décomposition en produit de facteurs premiers

PROPRIÉTÉ : Décomposition

Tout nombre entier admet une décomposition en produit de facteurs premiers, unique à l'ordre des facteurs près.

Pour déterminer cette décomposition, on teste si le nombre est divisible par les nombres premiers successifs, éventuellement plusieurs fois. Sur la calculatrice, la fonction « *Décomp* » permet d'obtenir la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers.

Exemple

Décomposer 180 en produit de facteurs premiers.

Correction

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

donc, $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ ou encore, $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.

3. Simplifier une fraction

MÉTHODE 1 Rendre une fraction irréductible

Pour simplifier une fraction, c'est à dire écrire une fraction égale mais avec des nombres plus petits au numérateur et au dénominateur, on procède de la façon suivante :

- On décompose le numérateur en produit de facteurs premiers.
- On décompose le dénominateur en produit de facteurs premiers.
- On simplifie par tout nombre commun au numérateur et au dénominateur.

Exercice d'application

Simplifier la fraction $\dfrac{90}{84}$.

Correction

$$\frac{90}{84} = \frac{2 \times 3^2 \times 5}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 3 \times 5}{\cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 7} = \frac{3 \times 5}{2 \times 7} = \frac{15}{14}.$$

Nombres premiers

1 Les nombres suivants sont-ils des nombres premiers ? Justifier.

1) 0.
2) 1.
3) 11.
4) 23.
5) 35.
6) 36.
7) 37.
8) 38.
9) 51.
10) 99.

2 Décomposer les nombres suivants en produits de facteurs premiers.

1) 12.
2) 18.
3) 28.
4) 45.
5) 48.
6) 210.
7) 442.
8) 2 310.
9) 2 048.
10) 100 000.

Simplifications de fractions

3

1) Décomposer les nombres 90 et 75 en produit de facteurs premiers.
2) Simplifier la fraction $\frac{90}{75}$.
3) Simplifier la fraction $\frac{75}{90}$.

4

1) Décomposer les nombres 242 et 165 en produit de facteurs premiers.
2) Simplifier la fraction $\frac{242}{165}$.
3) Simplifier la fraction $\frac{165}{242}$.

5 Simplifier les fractions suivantes :

1) $\frac{5}{15}$.
2) $\frac{12}{23}$.
3) $\frac{15}{35}$.
4) $\frac{20}{90}$.
5) $\frac{125}{45}$.
6) $\frac{57}{98}$.

6 Voici les diviseurs de trois nombres :

	Liste des diviseurs
42	1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 ; 42
56	1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 8 ; 14 ; 28 ; 56
60	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60

À l'aide de cette liste, simplifier au maximum chaque fraction.

1) $\frac{42}{56}$
2) $\frac{56}{42}$
3) $\frac{56}{60}$
4) $\frac{60}{56}$
5) $\frac{60}{42}$
6) $\frac{42}{60}$

Défis

7 Une conjecture est un résultat que l'on pense vrai, mais qui n'a pas encore été démontré. La conjecture de Goldbach dit que tout nombre pair strictement supérieur à 2 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers. Par exemple, $8 = 3 + 5$; $40 = 23 + 17$.

1) Trouver une telle somme pour 28.
2) Trouver une telle somme pour 42.
3) Trouver une telle somme pour 52.

8 On considère un nombre entier naturel n. On note S la somme de tous ses diviseurs stricts (c'est-à-dire ses diviseurs autres que lui-même).

- n est dit parfait lorsque $S = n$.
- n est dit déficient lorsque $S < n$.
- n est dit abondant lorsque $S > n$.

Par exemple, 8 a comme diviseurs 1 ; 2 ; 4 et 8 donc $S = 1 + 2 + 4 = 7$ et 7 est plus petit que 8, donc 8 est déficient.

1) Vérifier que 28 et 496 sont des nombre parfait.
2) Trouver le plus petit nombre déficient, le plus petit nombre parfait et le plus petit nombre abondant.
3) Quelle est la nature des nombres 7 ; 11 et 29 ?
4) Quelle est la nature d'un nombre premier ?

Récréation, énigmes

Le jeu de Juniper-Green est un jeu mathématique se jouant à deux joueurs. Il a été créé par *Richard Porteous*, enseignant à l'école de Juniper Green, auquel il doit son nom. Deux joueurs jouent sur une grille de N nombres suivant les règles suivantes :

- Règle 1 : le premier joueur choisit un nombre pair entre 1 et N et le barre sur la grille.
- Règle 2 : chacun son tour, les deux joueurs choisissent un nombre parmi les multiples ou les diviseurs du nombre choisi précédemment par son adversaire et inférieur à N.
- Règle 3 : un nombre ne peut être joué qu'une seule fois.

Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu.

1) En binôme, jouer quelques parties sur une grille de 20 nombres. Sous la grille, noter la suite de nombres obtenue.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

....

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

....

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

....

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

....

Trouver une suite minimale : ....

Trouver une suite maximale : ....

2) On considère maintenant une grille de 100 nombres.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Trouver une suite minimale : ....

Trouver une suite maximale : ....

LE CRIBLE D'ÉRATOSTHÈNE

Prénom ....

On considère le tableau des nombres entiers de 1 à 100 ci-dessous.

1) Barrer le nombre 1.
2) Entourer le nombre 2, premier nombre non barré après 1, puis barrer tous les multiples de 2 plus grands que 2.
3) Entourer le nombre 3, premier nombre non barré après 2, puis barrer tous les multiples de 3 plus grands que 3.
4) Entourer le nombre 5, premier nombre non barré après 3, puis barrer tous les multiples de 5 plus grands que 5.
5) Continuer ainsi de suite jusqu'à 10 puis entourer les nombres restants.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Eratosthène ($-276/-194$) était un mathématicien, géographe, philosophe, astronome, poète grec. Cet algorithme permet de trouver tous les **nombres premiers** (des nombres entiers divisibles uniquement par 1 et eux-même) inférieurs à un certain nombre n, ici 100.
Lister ces nombres :

....

....

....

LE CRIBLE D'ÉRATOSTHÈNE

On considère le tableau des nombres entiers de 1 à 100 ci-dessous.

1) Barrer le nombre 1.
2) Entourer le nombre 2, premier nombre non barré après 1, puis barrer tous les multiples de 2 plus grands que 2.
3) Entourer le nombre 3, premier nombre non barré après 2, puis barrer tous les multiples de 3 plus grands que 3.
4) Entourer le nombre 5, premier nombre non barré après 3, puis barrer tous les multiples de 5 plus grands que 5.
5) Continuer ainsi de suite jusqu'à 10 puis entourer les nombres restants.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Eratosthène ($-276/-194$) était un mathématicien, géographe, philosophe, astronome, poète grec. Cet algorithme permet de trouver tous les **nombres premiers** (des nombres entiers divisibles uniquement par 1 et eux-même) inférieurs à un certain nombre n, ici 100.
Lister ces nombres :

....

....

....