ESPACE & GÉOMÉTRIE

25

Les droites du triangle

Connaissances et compétences abordées

- Triangle : hauteurs et médiatrices.
- Construire et coder une figure.

ACTIVITÉ 1 Des droites concourantes

L'objectif est de démontrer que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Objectifs : tracer les médiatrices d'un triangle ; montrer que les médiatrices d'un triangle sont concourantes ; faire une démonstration.

Phases à partir de la fiche DES DROITES CONCOURANTES.

1) **Partie 1 : Construction de médiatrices.**
   Dans les trois premières questions, il s'agit de réinvestir la notion de médiatrice vue en sixième : construction, définition et propriété. Dans les questions 4) et 5), les élèves construisent les médiatrices d'un triangle, d'un pentagone et d'un quadrilatère. Les médiatrices du triangle sont concourantes alors que ce n'est pas le cas pour les deux autres figures. Le but est de montrer que cette « concourance » n'est pas une propriété commune ou évidente.
2) **Partie 2 : Démonstration.**
   On démontre que les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en utilisant la propriété fondamentale suivante : « tout point de la médiatrice d'un segment est à égale distance des extrémités de ce segment. ». Plus précisément, on montre que si O est le point d'intersection de deux médiatrices, alors il est aussi sur la troisième.

DÉBAT 2 Mot valise

Un **mot-valise** est un mot formé par l'accolement du début d'un mot et la fin d'un autre mot. À l'heure actuelle, on invente régulièrement des mots-valise : *Brexit* pour Britain et exit, *Twictée* pour Twitter et dictée, *pourriel* pour poubelle et courriel. . .

Les maths n'échappent par à la règle et le mot *médiatrice* est un mot-valise qui vient de médiane (dans un triangle, droite joignant un sommet au milieu du côté opposé) et bissectrice (droite coupant un angle en deux angles égaux). Il a été formé en 1923, donc très récemment.

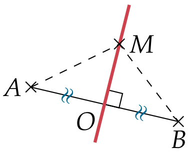
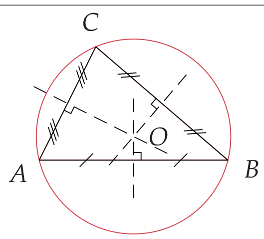
Trace écrite

1. Médiatrices d'un triangle

DÉFINITION : Médiatrices d'un triangle

Les **médiatrices** d'un triangle sont les médiatrices des côtés du triangle, c'est à dire les trois droites perpendiculaires aux côtés qui passent par leur milieu.

Pour tracer la médiatrice du segment $[AB]$ au compas, on choisit un écartement au compas et on trace deux arcs de cercle à partir de A et de B de part et d'autre du segment $[AB]$. Puis on trace la droite passant par les deux points formés par l'intersection des arcs de cercle.

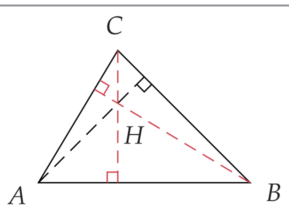
	**PROPRIÉTÉ 1** Si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment.	Ici, M appartient à la médiatrice de $[AB]$. Donc $MA = MB$.
	**PROPRIÉTÉ 2** Dans un triangle, les trois médiatrices sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.	Ici, les médiatrices à $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ se coupent en O qui est le centre du cercle passant par les trois sommets A, B et C.

2. Hauteurs d'un triangle

DÉFINITION : Hauteurs d'un triangle

Les **hauteurs** d'un triangle sont les hauteurs relatives aux côtés du triangle, c'est à dire les trois droites perpendiculaires aux côtés qui passent par le sommet opposé.

Pour tracer la hauteur dans un triangle issue d'un sommet, on trace la droite passant par ce sommet et perpendiculaire au côté opposé.

	**PROPRIÉTÉ 3** Dans un triangle, les trois hauteurs sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle.	Ici, H est le point de concours de la hauteur issue de C et de celle issue de B. Donc, $[AH]$ est la hauteur issue de A.

Tracés de médiatrices et de hauteurs

1 Construire un triangle TOC à la règle. À main levée, tracer puis coder :

1) en bleu, la médiatrice de $[TO]$.

2) en rouge, la hauteur issue de O.

2 Suivre le programme suivant en codant les éléments construits :

1) Construire un triangle CJR.

2) Tracer en rouge la médiatrice de $[JR]$ au compas.

3) Tracer en noir la médiatrice de $[CJ]$ à la règle graduée et l'équerre.

4) Construire la médiatrice (d) de $[CR]$ avec seulement une équerre non graduée.

3 Dans chaque cas, construire le triangle LYS puis son cercle circonscrit de centre O.

1) $LS = 8$ cm, $\widehat{YLS} = 65°$ et $\widehat{YSL} = 45°$.

2) $LS = 4$ cm, $LY = 5$ cm et $\widehat{YLS} = 103°$.

3) LYS est isocèle en L tel que $LY = 8$ cm et $YS = 5{,}5$ cm.

4) LYS est un triangle équilatéral de côté 4 cm.

4 Construire le triangle RNB isocèle en B avec $BN = 4$ cm tel que son cercle circonscrit ait un rayon de 5 cm.

5 Construction de hauteurs.

1) Construire le triangle JVE puis tracer :
- en bleu, la hauteur issue du sommet E ;
- en noir, la hauteur issue du sommet J ;
- en rouge, la hauteur relative à $[JE]$.

2) Quelle remarque peut-on faire ?

6 Tracer les hauteurs dans les cas suivants :

1) un triangle DER ayant trois angles aigus ;

2) un triangle NRV tel que $\widehat{NRV}$ soit obtus ;

3) un triangle GHT rectangle en T.

Quelles remarques peut-on faire ?

Conjectures et démonstrations

7

1) Tracer un triangle YES quelconque.

2) Placer :
- le milieu O du côté $[ES]$;
- le milieu U du côté $[YS]$;
- le milieu I du côté $[YE]$.

3) Tracer le triangle OUI puis ses hauteurs.

4) Placer le point T orthocentre du triangle OUI.

5) Trace le cercle de centre T et de rayon $[TY]$.

6) Quelle conjecture peut-on écrire ?

8

1) Tracer un triangle BAC rectangle en A.

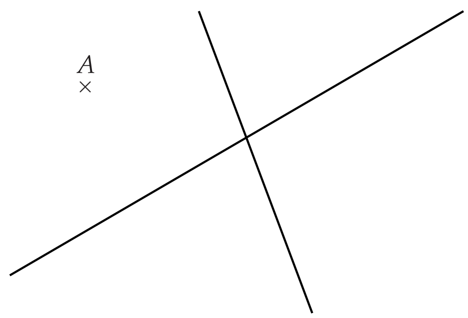
2) Place un point M sur le segment $[BC]$.

3) La droite perpendiculaire à (AB) passant par M coupe $[AB]$ en I et la droite perpendiculaire à $[AC]$ passant par M coupe $[AC]$ en J.

4) Placer le point P sur la demi-droite $[MI)$ tel que I soit le milieu de $[MP]$ et le point Q sur la demi-droite $[MJ)$ tel que J soit le milieu de $[MQ]$.

5) Que représente le point A pour le triangle MQP ? Justifier.

9 Célia avait tracé un triangle AVU au crayon et les médiatrices de deux des côtés au stylo. Son voisin Alan a effacé le triangle mais a laissé le point A et les deux médiatrices. Reconstruire le triangle de Célia.



Source : Sesamath, le manuel 5e. Génération 5 - 2013

Récréation, énigmes

La droite d'Euler

Ouvrir Geogebra et choisir l'onglet **Géométrie**.

1) Construction de la figure

	Instructions	Outil GeoGebra	Action
1	Construction du **triangle** ABC		
	Tracer un triangle ABC	polygone	cliquer en trois points quelconques du plan
2	Construction des trois **hauteurs** et de l'orthocentre H		
	Tracer les hauteurs du triangle	droites perpendiculaires	sélectionner pour chaque hauteur le sommet et son côté opposé
	Placer l'orthocentre	intersection entre deux objets	sélectionner deux hauteurs parmi les trois
	Renommer l'orthocentre en H	clic droit propriétés	nom du point : H
	Effacer les hauteurs	clic droit	décocher « afficher l'objet »
3	Construction des trois **médiatrices** et du centre du cercle circonscrit O		
	Tracer les médiatrices du triangle	médiatrices	choisir pour chaque médiatrice deux sommets
	Placer le centre du cercle circonscrit	…	…
	Renommer le centre en O	…	…
	Tracer le cercle circonscrit	cercle (centre-point)	choisir le centre O et le sommet A
	Effacer les médiatrices	…	…
4	Construction des trois **médianes** et du centre de gravité G. *La médiane d'un côté du triangle est la droite passant par le milieu du côté et le sommet opposé.* *Le point de concours des médianes s'appelle le centre de gravité.*		
	Tracer les médianes du triangle	milieu ou centre	sélectionner deux points du triangle
		droite passant par deux points	sélectionner sommet et milieu du côté opposé
	Placer le centre de gravité	…	…
	Renommer le centre en G	…	…
	Effacer les médianes et les milieux	…	…

2) Constatations

1) H, O et G peuvent-ils être confondus ? Dans quels cas ?

. . . .

2) Dans le cas où aucun point n'est confondu, que peut-on conjecturer sur l'alignement des points G, O et H ?

. . . .

3) Peut-on conjecturer l'existence d'une relation de longueur entre HG et GO ?

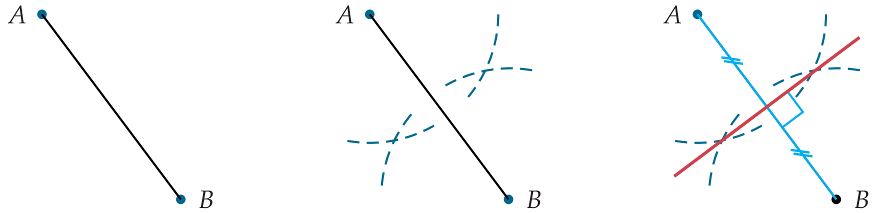
. . . .

DES DROITES CONCOURANTES

Prénom ....

Construction de médiatrices

1) Expliquer à l'oral la construction de la médiatrice d'un segment d'après les schémas suivants :



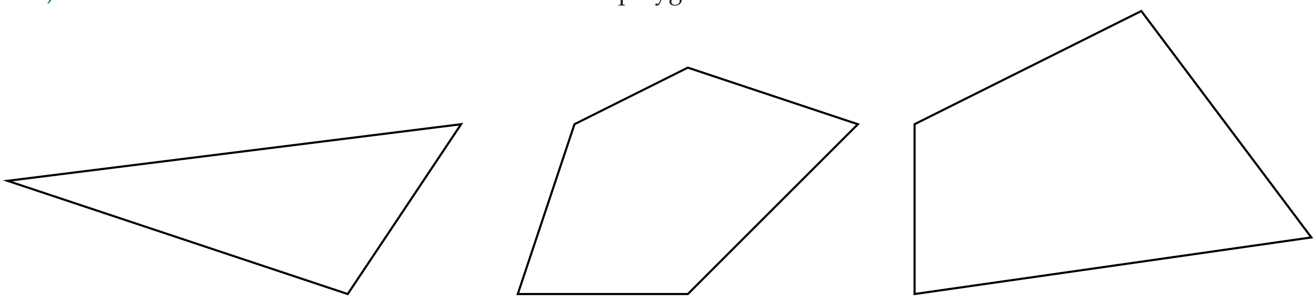
2) Donner une définition de la médiatrice d'un segment :

....

3) Donner une propriété de la médiatrice d'un segment :

....

4) Tracer la médiatrices de tous les côtés de ces trois polygones.



5) Pour quel polygone les médiatrices sont-elles concourantes ? ....

Démonstration

1) En bas de page, tracer un triangle ABC puis tracer la médiatrice de $[AB]$ et la médiatrice de $[BC]$.
Placer O, le pont d'intersection de ces deux médiatrices.

2) O se situe sur la médiatrice de $[AB]$. Comparer les longueurs OA et OB : ....

3) O se situe sur la médiatrice de $[BC]$. Comparer les longueurs OB et OC : ....

4) En déduire une relation entre OA et OC : ....

5) Que peut-on dire du point O par rapport à $[CA]$? ....

6) Tracer le cercle de centre O passant par A. Que remarque-t-on ? ....

7) Conclure : ....