

Équations

Connaissances et compétences abordées

▸ Notion d'équation.

▸ Tester une égalité.

ACTIVITÉ 1 Programme de calcul

Le but est de résoudre une équation en procédant par « essais-erreurs ».

Objectifs : tester une égalité ; utiliser un tableau numérique (tableur) ; établir une expression littérale.

Phases à partir de la fiche PROGRAMME DE CALCUL.

- 1) Phase 1 : introduction de la problématique. Un programme de calcul est affiché, en faisant fonctionner ce programme, on doit trouver un certain nombre : 267.
- 2) Phase 2 : essais de résolution à la main. Les élèves testent différentes valeurs. Aucune ne convient.
- 3) Phase 3 : après quelques essais infructueux, et étant donné la longueur de cette procédure numérique, on propose aux élèves de remplir un tableur afin d'automatiser les calculs et trouver la solution qui est 36.
- 4) Phase 4 : on demande aux élèves de faire un tableau simplifié en recherchant auparavant l'expression littérale correspondant au problème et en la réduisant, on obtient $7x + 15$.

DÉBAT 2 Vidéo sur les équations

Vidéo « Les équations », sur le site du Blob, l'extra-média de la Cité des sciences et de l'industrie et du Palais de la découverte.

1. Notion d'équations

■ DÉFINITION

- Une **équation** est une égalité entre deux expressions où apparaissent des inconnues désignées par des lettres.
- **Résoudre** l'équation, c'est trouver toutes les valeurs possibles pour l'inconnue. Ces valeurs sont appelées des **solutions** de l'équation.

$$\begin{array}{c} \text{inconnue } x \\ \downarrow \\ 2x + 5 = 105 \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ 1^{\text{er}} \text{ membre} \quad 2^{\text{e}} \text{ membre} \end{array}$$

2. Tester une égalité

MÉTHODE 1 Résoudre une équation en testant une égalité

Pour résoudre une équation, on peut tester différentes valeurs de l'inconnue et vérifier que les deux membres de l'égalité sont égaux en effectuant les étapes suivantes :

- 1) on écrit séparément les deux membres de l'égalité ;
- 2) on remplace l'inconnue par la valeur numérique dans chaque membre ;
- 3) on calcule la valeur de chaque membre :
 - si elles sont égales, l'égalité est vraie.
 - si elles ne sont pas égales, l'égalité est fausse.

Exercice d'application L'égalité $2x + 1 = 5x - 5$ est-elle vraie pour $x = 3$?

Correction Pour $x = 3$, on a :

- $2x + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$.
- $5x - 5 = 5 \times 3 - 5 = 10$.

Les deux membres de l'égalité ne sont pas égaux, donc l'égalité n'est pas vraie pour $x = 3$.

Exercice d'application L'égalité $2x + 1 = 5x - 5$ est-elle vraie pour $x = 2$?

Correction Pour $x = 2$, on a :

- $2x + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$.
- $5x - 5 = 5 \times 2 - 5 = 5$.

Les deux membres de l'égalité sont égaux, donc l'égalité est vraie pour $x = 2$.

On dit que 2 est une solution de l'équation $2x + 1 = 5x - 5$.

REMARQUE : en cinquième, on résout une équation en testant des valeurs pour l'inconnue. La résolution algébrique sera abordée en quatrième.

Tester une égalité

1 L'égalité $5x = 2x + 15$ est-elle vérifiée :

- 1) Pour $x = 4$?
- 2) Pour $x = 5$?

2

- 1) Montrer que pour $x = 3$, l'égalité $2x^2 = 6x$ est vérifiée.
- 2) Peut-on trouver un autre nombre pour lequel l'égalité précédente est vérifiée?

3 Déterminer si l'égalité $3y = 4x - 3$ est vérifiée :

- 1) pour $y = 3$ et $x = 3$?
- 2) pour $y = 4$ et $x = 3$.

Résoudre une équation

4 Compléter les opérations à trou suivantes.

- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| 1) $4 \times \dots = 8$ | 7) $4 \times \dots = 2$ |
| 2) $6 \times \dots = 54$ | 8) $\dots \times 4 = 6$ |
| 3) $\dots \times 25 = 50$ | 9) $5 \times \dots = 22$ |
| 4) $1 \times \dots = 89$ | 10) $4 \times \dots = 3$ |
| 5) $\dots \times 21 = 0$ | 11) $8 \times \dots = 5$ |
| 6) $10 \times \dots = 10$ | 12) $3 \times \dots = 7$ |

5 Compléter les opérations à trou suivantes.

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| 1) $2 + \dots = 16$ | 7) $+2 + \dots = 6$ |
| 2) $5 + \dots = 15$ | 8) $-7 + \dots = -3$ |
| 3) $18 + \dots = 0$ | 9) $+6 + \dots = 3$ |
| 4) $18 + \dots = 8$ | 10) $10 + \dots = -4$ |
| 5) $-3 + \dots = 1$ | 11) $2 + \dots = -5$ |
| 6) $-5 + \dots = -7$ | 12) $-7 + \dots = -3$ |

6 Résoudre de tête les équations suivantes.

- | | |
|--------------------|------------------------|
| 1) $3 + x = 25$ | 7) $x + 48 = -29$ |
| 2) $-15 + x = 32$ | 8) $x - 8,5 = 7$ |
| 3) $2 + x = -5,8$ | 9) $3 \times m = 15$ |
| 4) $-45 + x = -47$ | 10) $t \times 5 = 3,5$ |
| 5) $x + 42 = 78$ | 11) $7x = 21$ |
| 6) $x - 28 = 14$ | 12) $18x = 29$ |

Petits défis

7 Simon a inscrit un nombre sur sa calculatrice puis a tapé la suite de touches suivante :

×
5
+
8

- 1) Combien a-t-il trouvé en ayant choisi le nombre 24?
- 2) Simon a trouvé 43, quel nombre avait-il écrit sur sa calculatrice?
- 3) Simon se demande quel nombre afficher pour obtenir 12. Pouvez-vous l'aider?

8 Voici un programme :

Choisis un nombre.
 Retire-lui 3.
 Multiplie le résultat par 5.

- 1) Faire fonctionner le programme avec trois nombres de votre choix.
- 2) Quel nombre faut-il choisir pour obtenir -15 ?
- 3) Quel nombre faut-il choisir pour obtenir 0?
- 4) Soit x le nombre de départ, donner l'expression finale en fonction de x .

9 Lily a acheté un cahier à 2 € et trois classeurs. Il a payé 23 €. Combien coûte un classeur?

10 La somme de trois entiers consécutifs est 72. Quels sont ces nombres?

11 Mattis est allé faire les courses ; avec 14,53 € il a acheté :

- 1,1 kg de viande à 10,50 € le kilogramme ;
- 250 g de jambon à 8,52 € le kilogramme ;
- une petite boîte de pâté.

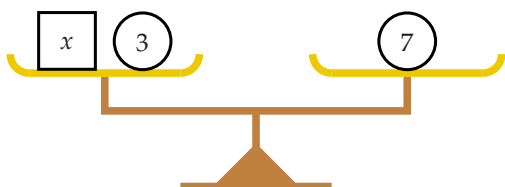
- 1) Quel est le prix du pâté?
- 2) On note p le prix de pâté, quelle équation permet de résoudre le problème de manière algébrique?

Source : Les cahiers Sesamath 5^e. Magnard-Sésamath 2017.

En route vers la quatrième

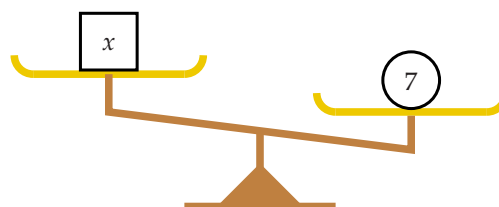
Équations du type $x + a = b$

- On souhaite résoudre l'équation $x + 3 = 7$. Trouver la solution de tête :
- On peut schématiser cette équation de la façon suivante à l'aide d'une balance :



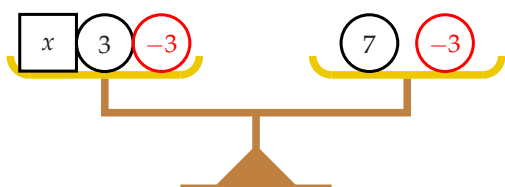
Le bras de gauche contient les poids x et 3 , le bras de droite le poids 7 . On veut rendre x seul.

Traduction algébrique : $x + 3 = 7$.



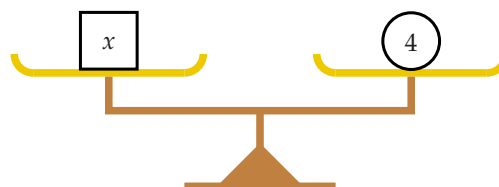
En enlevant le poids 3 à gauche, la balance n'est plus en équilibre, l'équation n'est donc plus vérifiée.

Traduction algébrique : $x \neq 7$.



On enlève donc le poids 3 à gauche ET à droite pour équilibrer la balance. Cela revient à ajouter le poids 3 .

Traduction algébrique : $x + 3 + (-3) = 7 + (-3)$.



3 et -3 s'annulent à gauche laissant x seul et on obtient 4 à droite.

Traduction algébrique : $x = 4$.

- Résoudre de la même manière les équations suivantes :

a) $x + 2 = 5$

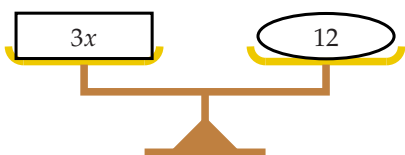
b) $x - 4 = 3$

c) $x + 7 = -3$

d) $x - 6 = -9$

Équations du type $a \times x = b$

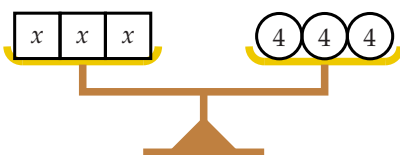
- On souhaite résoudre l'équation $3 \times x = 12$. Trouver la solution de tête :
- On peut schématiser cette équation de la façon suivante avec une balance :



Le bras de gauche contient les poids $3x$, le bras de droite le poids 12 .

On veut rendre x seul.

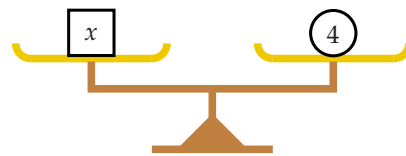
Traduction algébrique : $3 \times x = 12$.



On divise les poids en 3, on obtient sur le bras de gauche : $3 \times x = x + x + x$

et sur le bras de droite : $3 \times 4 = 4 + 4 + 4$

Traduction algébrique : $3 \times x = 3 \times 4$.



Par proportionnalité, on en déduit alors que chaque poids x est égal à un poids 4 .

Traduction algébrique : $x = 4$.

- Résoudre de la même manière les équations suivantes :

a) $2x = 8$

b) $4x = -9$

c) $-7x = 56$

d) $-6x = -18$

On considère le programme de calcul suivant :

Choisir un nombre.
 Lui ajouter 3.
 Multiplier le résultat par 5.
 Ajouter le double du nombre choisi au départ.

En faisant fonctionner ce programme, on obtient 267.

Tester des valeurs à la main

- 1) Tester le programme avec 0 :
- 2) Tester le programme avec 1 :
- 3) Tester le programme avec 10 :
- 4) Tester le programme avec 22 :

Tester des valeurs à l'aide d'un tableur.

On s'aperçoit très vite que pour trouver la valeur de départ, il faut procéder à de nombreux essais à moins de tomber « par hasard » sur la bonne valeur. Afin de limiter les calculs, on va s'aider d'un tableur.

- 1) Ouvrir un tableur présent sur l'ordinateur. *Il peut s'agir de Calc ou d'Excel.*
- 2) Remplir la première ligne ainsi :

	A	B	C	D
1	nombre choisi	ajouter 3	multiplier le résultat par 5	ajouter le double du nombre de départ
2				

- 3) Dans la cellule **A2**, inscrire 0.
- 4) Dans la cellule **B2**, écrire la formule suivante : **=A2+3**.
 Que signifie cette formule ? Quel résultat s'affiche dans cette cellule ?

- 5) Quelle formule doit-on entrer dans la cellule **C2** pour obtenir le résultat de la cellule **B2** multiplié par 5 ? Vérifier que le résultat affiché est cohérent.

- 6) Quelle formule doit-on entrer dans la cellule **D2** pour obtenir le résultat de la somme de la cellule de la cellule **C2** et du double du nombre de départ ? Vérifier que le résultat affiché est cohérent.
- 7) Afin de tester un grand nombre de valeurs, on va entrer les valeurs de 0 à 50 dans la colonne **A**. Pour cela, entrer dans la cellule **A3** le nombre 1.
- 8) Sélectionner les cellules **A2** et **A3** puis copier la sélection vers le bas jusqu'à obtenir 50.
- 9) Sélectionner les cellules **B2** à **D2** et les copier vers le bas jusqu'à la ligne 52.
- 10) Conclure sur la solution du problème.

Une cellule est désignée par un couple **lettre-nombre** qui indique la case à l'intersection de la colonne **lettre** et de la ligne **nombre**

Pour saisir une formule dans une cellule, il faut commencer par le signe **=** pour indiquer qu'il s'agit d'un calcul.

Dans une feuille de calcul, le signe de multiplication est l'étoile *****

Pour copier les cellules, sélectionner le coin inférieur droit des deux cellules sélectionnées puis glisser la souris vers le bas.

Tester des valeurs à l'aide d'une expression algébrique

- 1) Soit x le nombre choisi, quelle expression littérale obtient-on après le programme ?
- 2) Réduire l'expression.
- 3) Construire un deuxième tableau comportant uniquement deux colonnes : celles du nombre choisi et du résultat.