

Proportionnalité

Connaissances et compétences abordées

- ▶ Reconnaître une situation de proportionnalité ou de non-proportionnalité.
- ▶ Résoudre des problèmes utilisant la proportionnalité (pourcentages, échelles, agrandissement réduction) en mettant en œuvre des procédures variées : additivité, homogénéité, passage à l'unité, coefficient de proportionnalité.

ACTIVITÉ 1 Le puzzle de Brousseau

Cette activité a été proposée par Guy Brousseau, didacticien des mathématiques français. Il s'agit, en groupe, d'effectuer l'agrandissement d'une figure, c'est donc une situation de proportionnalité dans un cadre géométrique.

Objectifs : mettre en œuvre un ou des moyens pour résoudre un problème d'agrandissement ; reproduire une figure géométrique en respectant des mesures ; rendre compte d'un travail en groupe.

Phases à partir de la fiche LE PUZZLE DE BROUSSEAU.

- 1) Les élèves sont en groupes, ils reçoivent le puzzle qu'ils doivent agrandir : le segment qui mesure 4 cm sur la feuille devra mesurer 5 cm après agrandissement. Le groupe doit se mettre d'accord sur la procédure à adopter.
- 2) Les élèves se répartissent le travail : il y a six pièces à mesurer et à dessiner.
- 3) Lorsque les pièces sont dessinées, les élèves reconstituent le puzzle, s'il ne « ferme » pas, c'est qu'il y a une ou des erreurs.
- 4) Un compte-rendu pas groupe est élaboré et expliqué au reste de la classe.

DÉBAT 2 Ces affreux pourcentages !

Deux vidéos montrant des informations erronées à propos de pourcentages dans des journaux d'information.

Deux grandeurs sont proportionnelles lorsque l'on obtient les valeurs de l'une en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre. On peut représenter ces grandeurs dans un tableau.

1. Procédures de proportionnalité (rappels)

Dans tout le cours, on considère le problème suivant dans laquelle les stylos sont identiques et de même valeur :

Si 4 stylos coûtent 10 €, combien coûtent 12 stylos ?

■ PROPRIÉTÉ : Additivité ou linéarité additive

4	5	9	18	6
10	12,5	22,5	45	15

$\begin{matrix} \uparrow + \uparrow = \uparrow \\ \downarrow + \downarrow = \downarrow \end{matrix}$

On cherche des relations d'addition/soustraction.
 Dans la première ligne on peut dire que $4 + 5 = 9$.
 Dans la ligne du dessous, on a également $10 + 12,5 = 22,5$.

Exemple Si 4 stylos coûtent 10 €, alors

12 stylos = 4 stylos + 4 stylos + 4 stylos coûtent $10 \text{ €} + 10 \text{ €} + 10 \text{ €} = 30 \text{ €}$.

■ PROPRIÉTÉ : Homogénéité ou linéarité multiplicative

4	5	9	18	6
10	12,5	22,5	45	15

$\begin{matrix} \times 2 \downarrow \div 3 \downarrow \\ \times 2 \uparrow \div 3 \uparrow \end{matrix}$

On cherche des relations de multiplication/division.
 Dans la première ligne on a $9 \times 2 = 18$ et $18 \div 3 = 6$.
 Et dans la ligne du dessous : $22,5 \times 2 = 45$ et $45 \div 3 = 15$.

Exemple Si 4 stylos coûtent 10 €, alors 12 stylos = 3×4 stylos coûtent $3 \times 10 \text{ €} = 30 \text{ €}$.

■ PROPRIÉTÉ : Passage par l'unité

stylos	4	1	12
prix en €	10	2,5	30

$\begin{matrix} \div 4 \downarrow \times 12 \downarrow \\ \div 4 \uparrow \times 12 \uparrow \end{matrix}$

On cherche le prix pour une unité.
 Dans la première ligne on a $4 \div 4 = 1$ puis $1 \times 12 = 12$.
 Dans la ligne du dessous, $10 \div 4 = 2,5$ et $2,5 \times 12 = 30$.

Exemple Si 4 stylos coûtent 10 €, alors 1 stylo coûte 4 fois moins cher soit $10 \text{ €} \div 4 = 2,5 \text{ €}$ et 12 stylos coûtent 12 fois plus, donc $12 \times 2,5 \text{ €} = 30 \text{ €}$.

■ PROPRIÉTÉ : Coefficient de proportionnalité

stylos	4	12
prix en €	10	30

$\times 2,5$

Le coefficient de proportionnalité est l'unique coefficient multiplicateur permettant de passer d'une grandeur à une autre.

Exemple Si 4 stylos coûtent 10 €, le coefficient de proportionnalité est de 2,5 car $4 \times 2,5 = 10$. Alors, 12 stylos coûtent 30 € car $12 \times 2,5 = 30$.

2. Reconnaître des situations de proportionnalité

MÉTHODE 1 Proportionnel ou pas ?

Pour reconnaître des grandeurs proportionnelles on peut vérifier qu'il existe un coefficient de proportionnalité entre ces grandeurs.

Exercice d'application Le périmètre d'un cercle est-il proportionnel à son rayon ?

L'aire d'un disque est-elle proportionnelle à son rayon ?

Correction On a $p = 2\pi r = \boxed{2\pi} \times r$.

2π est un coefficient constant, le périmètre est donc bien proportionnel à son rayon.

On a $A = \pi r^2 = \boxed{\pi r} \times r$.

πr varie en fonction de r , l'aire n'est donc pas proportionnelle à son rayon.

Exercice d'application Ces deux tableaux T_1 et T_2 sont-ils des tableaux de proportionnalité ?

T_1	10	22	30
	12	26,4	36

T_2	10	22	30	45
	12	26,4	36	56

Correction On calcule tous les quotients :
 $\frac{12}{10} = 1,2$; $\frac{26,4}{22} = 1,2$; $\frac{36}{30} = 1,2$; $\frac{56}{45} \approx 1,24$.

T_1 est un tableau de proportionnalité de coefficient de proportionnalité 1,2.

T_2 n'est pas un tableau de proportionnalité car le dernier quotient n'est pas égal aux autres.

3. Pourcentages, échelles

■ DÉFINITION : Pourcentage

Le **pourcentage** d'une quantité est le nombre qui aurait été proportionnellement obtenu si la quantité avait été de 100.

Exemple

- Une promotion sur un jus de fruits indique que la contenance est de 1 L + 20 %.
Quelle est la nouvelle contenance ?
- La contenance d'une bouteille d'eau est passée de 1,5 L à 1,75 L.
Quel est le pourcentage d'augmentation ?

Correction

- Calcul de l'augmentation : $\frac{20}{100} \times 1 \text{ L} = 0,2 \text{ L}$.
Calcul de la nouvelle contenance :
 $1 \text{ L} + 0,2 \text{ L} = 1,2 \text{ L}$.
- Calcul de la différence entre les contenances :
 $1,75 \text{ L} - 1,5 \text{ L} = 0,25 \text{ L}$.
Calcul du pourcentage : $\frac{0,25 \text{ L}}{1,5 \text{ L}} \times 100 \approx 33\%$.

■ DÉFINITION : Échelle

L'**échelle** d'une carte est le coefficient de proportionnalité entre la mesure réelle et sa mesure sur la carte, ces deux mesures étant exprimées dans la même unité.

Exemple

Une carte au 1/2 000^e signifie que 1 cm sur la carte représente 2 000 cm en réalité, soit 20 m.

$\uparrow \div 20$	Distance sur la carte en cm	1	$\downarrow \times 20$
	Distance sur le terrain en m	20	

Le coefficient de proportionnalité est de 20.

Entraînement

Situations proportionnelles ?

1 Ces situations sont-elles proportionnelles ?

- 1) Taille en mètre en fonction de l'âge ?
- 2) Périmètre du carré en fonction de son côté ?
- 3) Distance parcourue à vélo à vitesse constante en fonction du temps.
- 4) Distance parcourue en auto en fonction du temps lors d'une accélération.
- 5) Subvention données à deux collègues :
1 430 000 € pour 650 élèves dans le collège A ;
1 100 000 € pour 580 élèves dans le collège B.

2 Tableaux de proportionnalité ou pas ?

- 1)

10	15	30
15	25	50
- 2)

20	60	80
50	150	200
- 3)

123,35	1 354,76
765,87	1 236,23
- 4)

9	10	13
9,9	1	14,3

3 Compléter ces tableaux de proportionnalité.

1	12	8	
		24	75

 $\downarrow \times \dots$

			60
3	10	26	

 $\downarrow \div 5$

Problèmes de proportionnalité

4 La pâtissière a pesé ses beignets et a trouvé que 2 beignets pèsent 300 g et 3 beignets pèsent 450 g. Combien pèsent : 5 beignets ? 6 beignets ? 10 beignets ?

5 Un robinet laisse échapper de façon continue trois litres d'eau en deux heures.

- 1) Quelle quantité d'eau se sera écoulée au bout d'une demi-journée ?
- 2) Quel temps s'est écoulé pour laisser s'échapper 51 L ?
- 3) L'eau est facturée 0,0031 € le litre. Quel sera le montant de la facture au bout d'un an ?

6 Aux États-Unis, on achète l'essence au gallon et non au litre. Un gallon mesure environ 3,8 L et valait 1,66 dollars dans le Missouri en janvier 2016.

- 1) Combien payait-on pour un plein de 38 L ?
- 2) À la même période, un litre d'essence valait 1,25 €. Quel prix payait-on pour un plein de 38 L ?
- 3) Sachant qu'un euro valait 1,07 US \$, quelle économie a fait l'automobiliste américain ?

7 Trois professeurs de mathématiques ont corrigé cent copies en deux heures.

- 1) Combien de professeurs faudrait-il pour corriger 50 copies en 20 minutes ?
- 2) Combien de temps mettraient 9 professeurs pour corriger ces 100 copies ?

Pourcentages, échelles, vitesses...

8 Au collège de Théa, le FSE prend en charge 25 % du prix des voyages scolaires alors que dans celui de Didier, le FSE donne 54 € pour un voyage de 180 €.

- 1) Si Théa participe à un voyage qui coûte 230 €, quel montant est-il pris en charge par son FSE ?
- 2) En proportion, dans quel collège le FSE participe-t-il le plus au financement des voyages ?

9 On mélange deux verres identiques contenant des boissons au sirop : dans l'un des verres il y a 3 % de sirop et dans l'autre 5 %.

Quel est le pourcentage de sirop dans le mélange ?

10 Sur un plan de maison à l'échelle 1/100^e, la salle à manger est représentée par un rectangle de 8 cm de long sur 6 cm de large. Quelles sont les dimensions réelles de cette pièce ?

Sur le plan d'une autre maison, les portes sont représentées par un segment de 1,2 cm de long. En réalité, elles sont larges de 0,80 m. Quelle est l'échelle de ce plan ?

11 La vitesse du son est d'environ 340 m/s. On considère ici que la lumière se propage instantanément. Simon compte la durée entre l'apparition d'un éclair et le début du son du tonnerre. À quelle distance se situe l'impact de foudre si il a compté : 25 s ? 3 s ? Combien compte-t-il de secondes si la foudre tombe à 2 km ?

12 La vitesse moyenne de connexion ADSL est de 10 Mbit/s (Mbit : méga bit soit 1 000 000 bits).

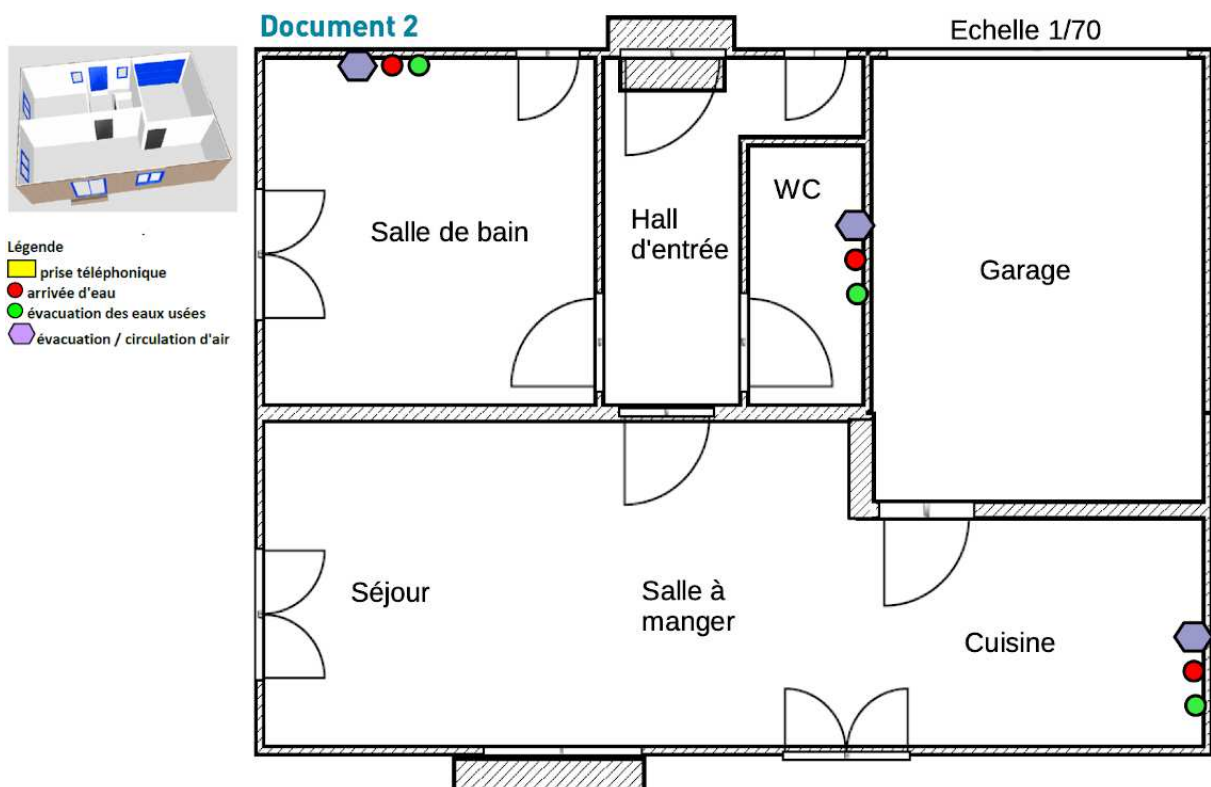
- 1) Quelle est la durée nécessaire pour charger un fichier de 786 Mbit ?
- 2) Calcule la taille d'un fichier qui s'est chargé en 5 min et 12 secondes.
- 3) Reprends les questions avec la vitesse moyenne de connexion de la fibre optique qui est de 100 Mbits/s.

Source : d'après Les cahiers Sésamath 5^e. Magnard-Sésamath 2017.

Tache avec prise d'initiative : je rénove ma maison

Lucie et Marc doivent poser le revêtement de sol dans leur pièce de vie principale (séjour, salle à manger et cuisine) de leur nouveau pavillon. Ils veulent poser du carrelage dans la cuisine et du parquet dans le reste de la pièce. Le carrelage qu'ils ont choisi est en promotion actuellement.

À l'aide du document 1 d'une page de magazine et du document 2 du plan du rez-de-chaussée de leur pavillon, aidez Lucie et Marc à estimer le montant de leur facture.



Source : eduSCOL.education.fr/ressources-2016 - résoudre des problèmes de proportionnalité.

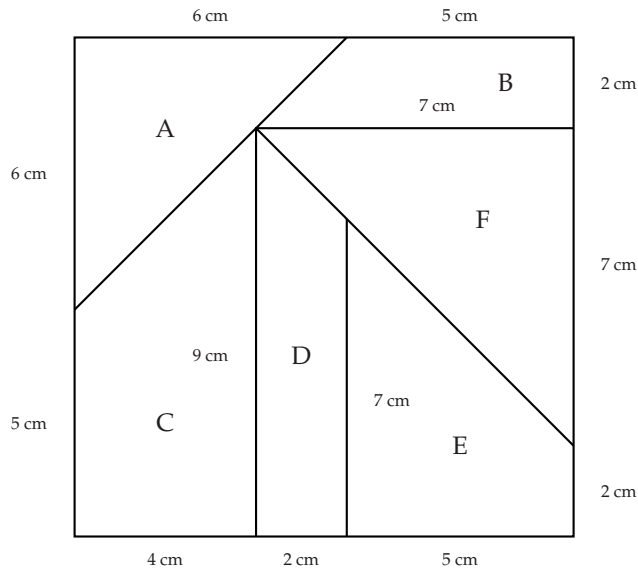
LE PUZZLE DE BROUSSEAU

Prénom

Ci-dessous se trouve un puzzle dont les mesures sont indiquées.

Par groupes de quatre, vous allez devoir refaire le même puzzle mais en plus grand : il faudra s'accorder sur la procédure à adopter pour agrandir les éléments du puzzle, se répartir la construction des pièces en faisant les calculs individuellement puis assembler les morceaux pour reconstituer le puzzle agrandi. Le compte-rendu de vos recherches sera présenté sous la forme d'une affiche par groupe.

Le segment de 4 cm devra mesurer 5 cm sur votre puzzle agrandi.



LE PUZZLE DE BROUSSEAU

Prénom

Ci-dessous se trouve un puzzle dont les mesures sont indiquées.

Par groupes de quatre, vous allez devoir refaire le même puzzle mais en plus grand : il faudra s'accorder sur la procédure à adopter pour agrandir les éléments du puzzle, se répartir la construction des pièces en faisant les calculs individuellement puis assembler les morceaux pour reconstituer le puzzle agrandi. Le compte-rendu de vos recherches sera présenté sous la forme d'une affiche par groupe.

Le segment de 4 cm devra mesurer 5 cm sur votre puzzle agrandi.

