NOMBRES ET CALCULS

2

Nombres entiers et décimaux

Connaissances et compétences abordées

- Connaître les unités de la numération décimale pour les nombres entiers et décimaux et les relations qui les lient.
- Composer, décomposer les nombres entiers et décimaux.
- Connaître la valeur des chiffres en fonction de leur rang.
- Multiplier et diviser un nombre par 10, 100, 1 000.

ACTIVITÉ 1 La droite graduée

Le principe est de faire construire aux élèves une droite graduée à l'aide d'un étalonet de commencer à y placer des nombres décimaux.

Objectifs : comprendre et utiliser le principe de construction d'une graduation régulière en dixièmes et en centièmes ; savoir situer des nombres décimaux sous différents écritures.

Phases à partir de la fiche LA DROITE GRADUÉE.

- Les étapes 1 à 4 proposent de construire une droite graduée sur une bande de 1m50 environ (de manière à graduer jusqu'à 3 avec un bande étalon de $\frac{1}{10}$ mesurant 5 cm).
- L'étape 5 demande de placer des nombres allant jusqu'aux dixièmes dans différentes écritures, l'utilisation de la bande étalon perm et de placer directement ces nombres.
- Les étapes 6 et 7 font manipuler des nombres allant jusqu'aux centièmes, les élèves doivent trouver une méthode pour les placer. La bande étalon contient une graduation utile…

Toutes les étapes donnent lieu à des discussions sur les différentes procédures possibles.

Source : Apprentissages numériques et résolution de problèmes au CM2, Ermel, Hatier 2001.

DÉBAT 2 Un peu d'histoire

Le système de numération que nous employons actuellement et qui nous semble si naturel est le fruit d'une longue évolution des concepts mathématiques. En effet, un nombre est une entité abstraite qui peut surprendre : on a déjà vu *un* élève, *un* animal donné, on sait ce qu'est *un* jour, mais qu'est-ce que *un* ? C'est une entité qui, prise seule, n'a pas vraiment de sens. De nombreuses civilisations ont imaginé des systèmes de numération plus ou moins compliqués, plus ou moins pratiques : des systèmes utilisant des bases différentes, des systèmes utilisant le principe additif… jusqu'à notre système de numération positionnel de base dix maintenant utilisé de manière universelle.

Trace écrite

1. Construction des nombres décimaux

DÉFINITION : Fraction décimale et nombre décimal

Une **fraction décimale** est une fraction dont le dénominateur est 1, 10, 100, 1 000 ...
Un **nombre décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous forme d'une fraction décimale.

Exemple

- Les fractions décimales les plus « simples » sont $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{1\,000}$; $\frac{1}{10\,000}$; $\frac{1}{100\,000}$ ...
- Mais $\frac{7}{10}$; $\frac{32}{1\,000}$; $\frac{99\,999}{100\,000}$ sont également des fractions décimales.
- 16, 802 est un nombre décimal car il peut s'écrire sous la forme $\frac{16\,802}{1\,000}$.

REMARQUE : $\frac{3}{1}$ est une fraction décimale valant 3 et $\frac{120}{10}$ est une fraction décimale valant 12.
Tout nombre entier est donc un nombre décimal « caché ».

2. Écrire des nombres décimaux

PROPRIÉTÉ : Nombre, chiffres et rang

Il y a dix chiffres indo-arabes dans notre numération : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Avec ces chiffres, on écrit des nombres : il y en a une infinité ! Ils s'écrivent par tranches de 3 chiffres.

partie entière												, partie décimale			
classe des milliards			classe des millions			classe des milliers			classe des unités			dixièmes	centièmes	millièmes	dix-millièmes
c	d	u	c	d	u	c	d	u	c	d	u				
		1	0	3	0	2	8	8	0	1	6	8	0	7	

Exemple

Dans le nombre 1 030 288 016,807 :

Correction

- 3 est le chiffre des dizaines de millions ;
- 6 est le chiffre des unités ;
- 7 est le chiffre des millièmes...

PROPRIÉTÉ : Règles orthographiques conformes à la réforme de 1990

- Deux mots d'un même nombre sont séparés par un trait d'union ;
- *mille* est invariable ;
- *vingt* et *cent* prennent un « s » lorsqu'il y en a plusieurs et qu'ils se trouvent à la fin ;
- *million* et *milliard* prennent un « s » quand il y en a plusieurs.

Exemple

- 4 000 : quatre-mille ;
- 80 : quatre-vingts et 81 : quatre-vingt-un ;
- 30 288 016,8 : trente-millions-deux-cent-quatre-vingt-huit-mille-seize et huit dixièmes.

3. Composer et décomposer des nombres décimaux

Un nombre a une seule valeur numérique mais a plusieurs écritures.

Exemple On a par exemple :

$$16{,}82 = \frac{1\,682}{100} \quad \text{fraction décimale}$$

$$= 16 + \frac{82}{100} \quad \text{décompositions additives}$$

$$= (1 \times 10) + (6 \times 1) + \left(8 \times \frac{1}{10}\right) + \left(2 \times \frac{1}{100}\right)$$

$$= (1 \times 10) + (6 \times 1) + (8 \times 0{,}1) + (2 \times 0{,}01)$$

4. Multiplier et diviser un nombre décimal par 10, 100, 1 000...

MÉTHODE 1 Multiplication par 10, 100 et 1 000

Multiplier un nombre par 10, 100, 1 000 revient à décaler les chiffres de 1, 2, 3 rangs vers la gauche dans le tableau de numération puis éventuellement de compléter avec des zéros jusqu'aux unités.

Exercice d'application

Calculer $3{,}5 \times 100$.

On trouve 350.

Correction

c	d	u	d^e	c^e	m^e	
		3	5			écrire le nombre de départ
3	5	←	←			décaler de 2 rangs vers la gauche
3	5	0				compléter avec un « 0 »

MÉTHODE 2 Division par 10, 100 et 1 000

Diviser un nombre par 10, 100, 1 000 revient à décaler les chiffres de 1, 2, 3 rangs vers la droite dans le tableau de numération puis éventuellement de compléter avec des zéros jusqu'aux unités.

Exercice d'application

Calculer $3{,}5 \div 100$.

On trouve 0,035.

Correction

c	d	u	d^e	c^e	m^e	
		3	5			écrire le nombre de départ
		→	→	3	5	décaler de 2 rangs vers la droite
		0	0	3	5	compléter avec deux « 0 »

Entraînement

Construction des nombres décimaux

1 Associe les nombres en fractions décimales à leur écriture décimale.

$\frac{24}{100}$	•	• 204
$\frac{2\,040}{10}$	•	• 2,4
$\frac{204}{100}$	•	• 0,24
$\frac{24}{10}$	•	• 2,04

2 Donner l'écriture décimale de :

$\frac{45}{100}$; $\frac{186}{10}$; $\frac{5}{1\,000}$; $\frac{6\,921}{100}$; $\frac{850}{10}$; $\frac{204}{1\,000}$

3 Donner l'écriture en fraction décimale de :
1,7 ; 25,04 ; 0,37 ; 4,005 ; 0,0592 ; 9,067

4 Complète le tableau suivant :

partie entière	partie décimale	fraction décimale	nombre décimal
51	2	$\frac{512}{10}$	51,2
3	72		
			0,81
		$\frac{330}{100}$	
			64,615

5 Associe chaque nombre de la première colonne à un nombre de la deuxième colonne.

67 dixièmes	•	• 67
670 millièmes	•	• 6 700
670 dixièmes	•	• 0,67
67 millièmes	•	• 0,006 7
67 dix-millièmes	•	• 0,067
67 centaines	•	• 6,7

Écrire des nombres décimaux

6 Écris en chiffres chacun des nombres suivants :
1) Deux-cent-trente-quatre-mille-sept-cent-trente-quatre et deux dixièmes.
2) Neuf-millions-sept-cent-mille-sept-cent-quarante.
3) Trois-milliards-cent-onze-millions-quatre-cent-quatorze et trois centièmes.
4) Trente-huit-millions-trente-huit-mille.
5) Vingt-six-milliards-cent-huit-millions-sept-cent-vingt-huit-mille-douze et cent-vingt-trois millièmes.

7 Écris en lettres les nombres suivants :
1) 58 736.
2) 53 200 000.
3) 543 823 942 900.
4) 12,34.
5) 0,023.
6) 0,0003.

8 Dans le nombre 6 083 472 donner :
1) le chiffre des unités ;
2) le chiffre des dizaines de mille ;
3) le chiffre des unités de millions ;
4) le nombre de centaines ;
5) le nombre de centaines de mille.

9 Écris en chiffres chacun des nombres.
1) 13 centaines et 25 unités.
2) 43 millions et 8 centaines.
3) 25 dizaines de mille et 67 centaines.
4) 73 centaines et 21 dizaines.

10 Dans le nombre 4 091,807 :
1) le chiffre des dixièmes est .....
2) le chiffre des unités est .....
3) le chiffre des millèmes est .....
4) le chiffre des centaines est .....
5) 409 est le nombre de .....
6) 4 091 807 est le nombre de .....
7) 40 est le nombre de .....
8) 40 918 est le nombre de .....

11 Réécris ces nombres de la façon la plus simple possible.
5,00 ; 0204,02 ; 0,230 ; 05 020 ; 1000,0800 ; 00,010.

Composer/décomposer des nombres

12 Écris le résultat des opérations :

1) $(1 \times 1\,000) + (4 \times 100) + (8 \times 10)$
2) $(3 \times 100\,000) + (6 \times 10\,000) + (1 \times 10)$
3) $(2 \times 1\,000\,000) + (2 \times 1\,000) + (5 \times 1)$
4) $(3 \times 100\,000) + (7 \times 1\,000) + (3 \times 100)$

13 Décompose comme à l'exercice précédent :
999 ; 9 418 ; 2 502 292 ; 5 000 003 107.

14 Décompose ainsi : $\frac{736}{100} = 7 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100}$.
$\frac{8\,725}{1\,000}$; $\frac{1\,253}{100}$; $\frac{32}{100}$; $\frac{908}{10}$.

15 Écris sous forme d'une fraction decimale.

1) $7 + \frac{6}{10}$
2) $45 + \frac{8}{10}$
3) $9 + \frac{7}{1\,000}$
4) $80 + \frac{3}{10} + \frac{1}{100}$
5) $3 + \frac{2}{100} + \frac{5}{10}$
6) $\frac{6}{10} + \frac{1}{1\,000}$
7) $7 + \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{9}{1\,000}$
8) $123 + \frac{2}{1\,000} + \frac{4}{100}$

16 Complète pour que les égalités soient justes :

1) $2,4\ldots6 = \frac{\ldots\ldots8\ldots}{1\,000}$
2) $3,45 = \frac{3\,450}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$
3) $1 + \frac{\ldots}{10} + \frac{5}{1\,000} = \ldots,6\ldots\ldots$
4) $\frac{23}{100} + \frac{\ldots}{1\,000} = \frac{\ldots\ldots7}{1\,000}$
5) $2\ldots,\ldots\ldots3 = 27 + \frac{1\ldots\ldots}{1\,000} = \frac{\ldots\ldots\ldots8\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$
6) $5\ldots + \frac{3\ldots}{100} = \frac{\ldots83\ldots}{\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots + \frac{\ldots}{10} + \frac{1}{100}$

17 Parmi ces écritures, quelles sont celles qui sont égales à 123,45 :

1) $12 + \frac{345}{1\,000}$
2) $123 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100}$
3) $123 + 0,45$
4) $\frac{12\,345}{10\,000}$
5) $\frac{1\,234}{1\,000} + \frac{5}{100}$
6) $\frac{1\,234}{10} + 5$
7) $\frac{1\,234}{10} + \frac{5}{1\,000}$
8) $1 + \frac{2\,345}{100}$
9) $123 + \frac{45}{100}$

Multiplier/diviser par 10, 100, 1 000

18 Calcule de tête :

1) 70×10
2) 100×100
3) $12\,400 \times 10$
4) $2,88 \times 10$
5) $0,91 \times 10$
6) $21,85 \times 100$
7) $9,5 \times 1\,000$
8) $70 \div 10$
9) $100 \div 100$
10) $12\,400 \div 10$
11) $2,88 \div 10$
12) $0,91 \div 10$
13) $21,85 \div 100$
14) $9,5 \div 1\,000$
15) $0,01 \div 100$

19 Complète pour que l'opération soit juste :

1) $4,965 \times \ldots\ldots = 496,5$.
2) $1,6 \times \ldots\ldots = 16$.
3) $\ldots\ldots \times 0,8 = 800$
4) $\ldots\ldots \times 100 = 20,4$
5) $58,3 \div \ldots\ldots = 5,83$
6) $5,01 \div \ldots\ldots = 0,050\,1$
7) $\ldots\ldots \div 10 = 4,7$
8) $3\,149 \div \ldots\ldots = 3,149$
9) $\ldots\ldots \div 1\,000 = 0,78$
10) $10 \times \ldots\ldots = 0,61$

Défis ! ! !

20 **Nombre mystère**

Je suis un nombre qui peut s'écrire avec quatre chiffres et une virgule ; mon chiffre des unités est le double de mon chiffre des centièmes ; mon chiffre des dizaines est le triple de mon chiffre des dixièmes ; mon chiffre des centièmes est quatre ; lorsqu'on ajoute mes quatre chiffres, on obtient le nombre d'heures qu'il y a dans une journée. Qui suis-je ?

21 **Nombre d'or**

Une de mes valeurs approchées s'écrit $\alpha, \beta\gamma\delta$.
Qui suis-je sachant que :

- $7,106 = (7 \times 1) + (\alpha \times 0,1) + (6 \times 0,001)$
- $23,61 = 23 + \frac{\beta}{10} + \frac{\gamma}{100}$
- $0,000\,18 = \frac{1}{10\,000} + \delta \times \frac{1}{100\,000}$

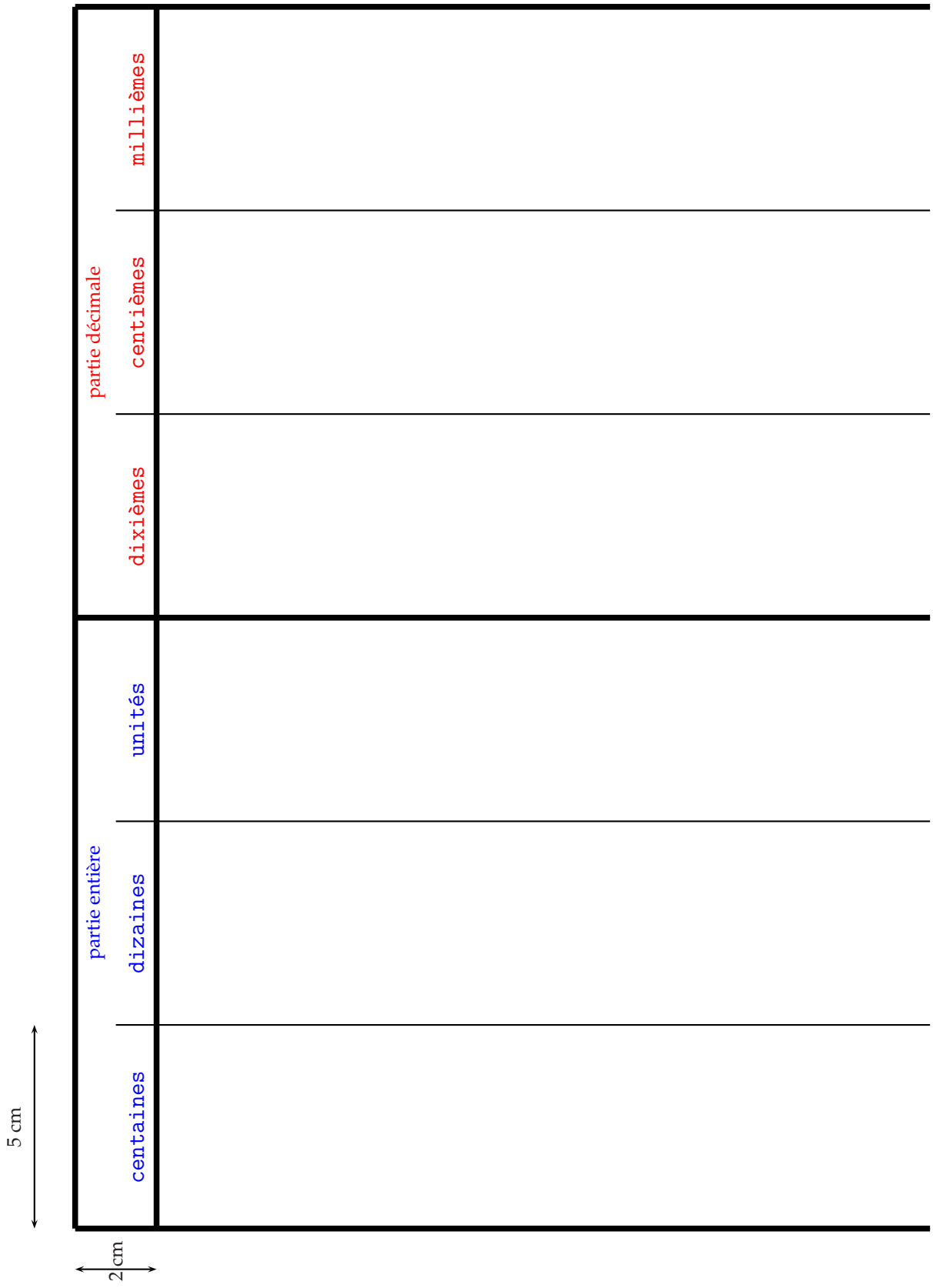
22 **Que de fourmis !**

Une colonie de 1 000 fourmis a trouvé un trésor : un tas de sucre en poudre oublié. Une forumi transporte 7,5 mg à chaque trajet vers la fourmilière. Au bout de 10 trajets de chaque fourmi, il ne reste plus de sucre. Quelle masse de sucre y avait-il au départ en gramme ?

Sources : Les cahiers Sesamath 6e. Magnard-Sésamath 2017 & Delta Maths 6e. Magnard 2016.

Récréation, énigmes

Construction d'un abaque romain à nombres décimaux sur une feuille entière en mode paysage format A4.



LA DROITE GRADUÉE

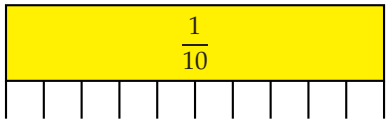
Prénom .....

Construction
Repérage

Étape 1 : Sur ta grande bande, trace au stylo une droite la plus longue possible.

Étape 2 : Place à gauche sur cette droite le repère de l'origine, inscrire la valeur 0 en dessous.

Étape 3 : Grâce à ta petite bande de couleur « $\frac{1}{10}$ », qui correspond à un dixième d'une unité, place le nombre 1.



Étape 4 : Place ensuite les nombres 2 et 3, toujours en dessous de la droite. Tu obtiens une droite graduée.

Étape 5 : Sur ta droite graduée, place au crayon à papier et au dessus les nombres suivants :

$$\frac{8}{10} \ ; \ 0{,}3 \ ; \ \text{cinq dixièmes} \ ; \ \frac{23}{10} \ ; \ 1{,}7 \ ; \ 2+\frac{1}{10} \ ; \ \text{douze dixièmes.}$$

Étape 6 : Trouve un moyen pour placer $\frac{143}{100}$ sur ta droite graduée.

Étape 7 : Place au crayon les nombres suivants :

$$\frac{255}{100} \ ; \ 0{,}23 \ ; \ \text{cent-six centièmes} \ ; \ 1+\frac{9}{10}+\frac{8}{100}.$$

LA DROITE GRADUÉE

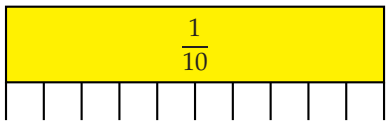
Prénom .....

Construction
Repérage

Étape 1 : Sur ta grande bande, trace au stylo une droite la plus longue possible.

Étape 2 : Place à gauche sur cette droite le repère de l'origine, inscrire la valeur 0 en dessous.

Étape 3 : Grâce à ta petite bande de couleur « $\frac{1}{10}$ », qui correspond à un dixième d'une unité, place le nombre 1.



Étape 4 : Place ensuite les nombres 2 et 3, toujours en dessous de la droite. Tu obtiens une droite graduée.

Étape 5 : Sur ta droite graduée, place au crayon à papier et au dessus les nombres suivants :

$$\frac{8}{10} \ ; \ 0{,}3 \ ; \ \text{cinq dixièmes} \ ; \ \frac{23}{10} \ ; \ 1{,}7 \ ; \ 2+\frac{1}{10} \ ; \ \text{douze dixièmes.}$$

Étape 6 : Trouve un moyen pour placer $\frac{143}{100}$ sur ta droite graduée.

Étape 7 : Place au crayon les nombres suivants :

$$\frac{255}{100} \ ; \ 0{,}23 \ ; \ \text{cent-six centièmes} \ ; \ 1+\frac{9}{10}+\frac{8}{100}.$$

MATÉRIEL : ÉTALONS DE DIXIÈMES D'UNITÉ

Prénom .....

		1	0	3	0	2	8	8	0	1	6	8	0	7	

		1	0	3	0	2	8	8	0	1	6	8	0	7	

		1	0	3	0	2	8	8	0	1	6	8	0	7	

		1	0	3	0	2	8	8	0	1	6	8	0	7	

		1	0	3	0	2	8	8	0	1	6	8	0	7	

		1	0	3	0	2	8	8	0	1	6	8	0	7	