FONCTIONS CIRCULAIRES

Table des matières

I Fonctions circulaires

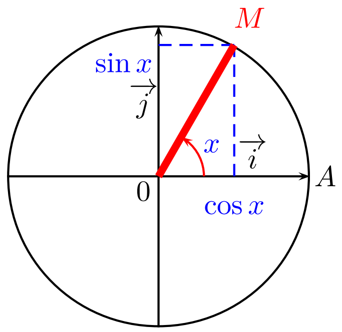
I.1 Définitions

Définition 1
Soit x un réel, il lui correspond un unique point M sur le cercle trigonométrique tel que x soit une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$.

- *Le* <u>*cosinus*</u> *de x, noté $\cos x$, est l'abscisse de M dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.*
- *Le* <u>*sinus*</u> *de x, noté $\sin x$, est l'ordonnée de M dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.*
- *La* <u>*tangente*</u> *de x, notée $\tan x$, est le rapport $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ pour $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.*

$\cos x$ et $\sin x$ sont donc respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

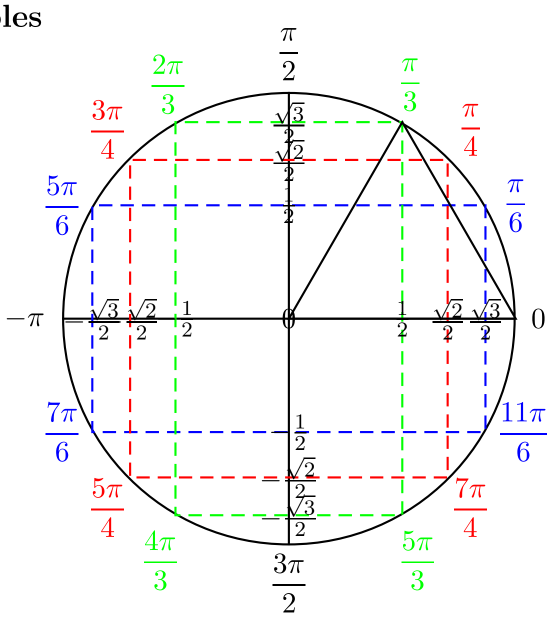
On note : $M \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$



Propriété 1

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

I.2 Valeurs remarquables



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\emptyset$

I.3 Variations et courbe représentative

La fonction sinus est impaire et $2\pi-$périodique.

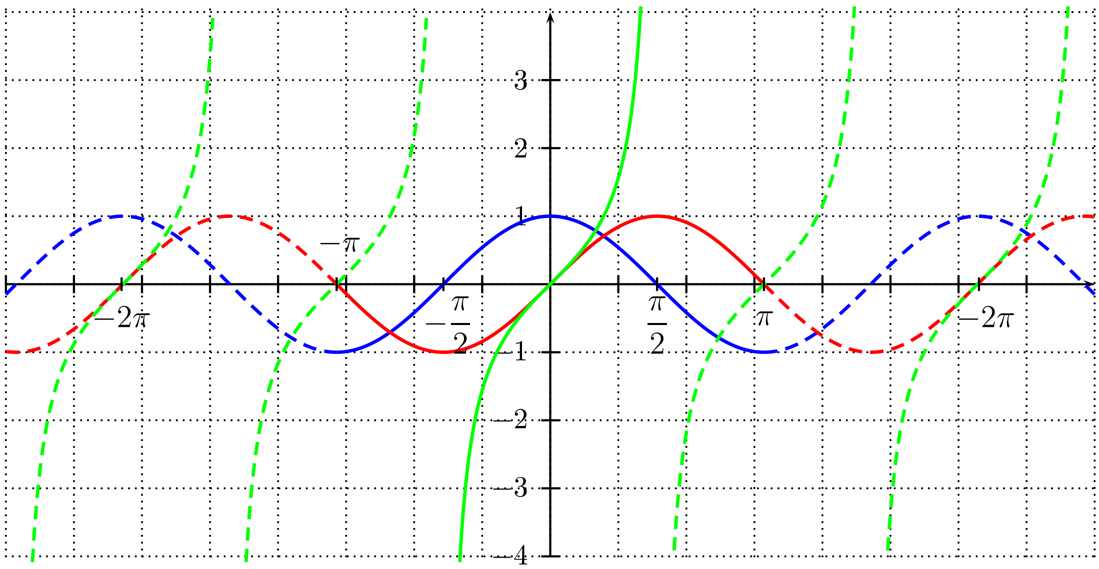
La fonction cosinus est paire et $2\pi-$périodique.

La fonction tangente est impaire et $\pi-$périodique.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0 ↗	1	↘ 0

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1 →	0	→ -1

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	0 →	$+\infty$



I.4 Dérivation

Propriété 2
Les fonctions sinus et cosinus sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction tangente est définie et dérivable sur tout intervalle ne contenant pas $\frac{\pi}{2}+k\pi$, et on a :

- $\cos'(x) = -\sin(x)$.
- $\sin'(x) = \cos(x)$.
- $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$.

II Fonctions circulaires réciproques

II.1 definitions

Considérons une fonction f définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à un réel x de I associe un réel y. Nous voudrions savoir si nous pouvons définir une fonction « retour » qui permette, à partir de y, de revenir à x.

Définition 2
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une fonction continue strictement monotone.
Il existe une unique fonction $f^{-1} : J \to I$ telle que pour tout $x \in I$ et pour tout $x \in J$:

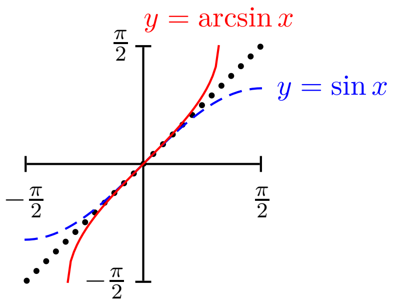
$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x.$$

Cette fonction est appelée <u>*fonction réciproque*</u> de f.

Remarque 1
Graphiquement, la courbe de la fonction réciproque f^{-1} d'une fonction f s'obtient en appliquant une symétrie d'axe la droite d'équation $y = x$.
C'est le cas, par exemple, pour les fonctions logarithme et exponentielle sur $\mathbb{R}$, où encore pour les fonctions carré et racine carrée sur $[0; +\infty[$.

II.2 Fonction arc sinus

Définition 3
La fonction sinus est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Elle admet donc sur cet intervalle une fonction réciproque définie sur $[-1; 1]$.
Cette fonction est appelée <u>*arc sinus*</u> *et notée* arcsin *ou parfois* $\sin^{-1}$.



$y = \arcsin x$ signifie que y est le réel (l'arc) compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ dont le sinus vaut x.

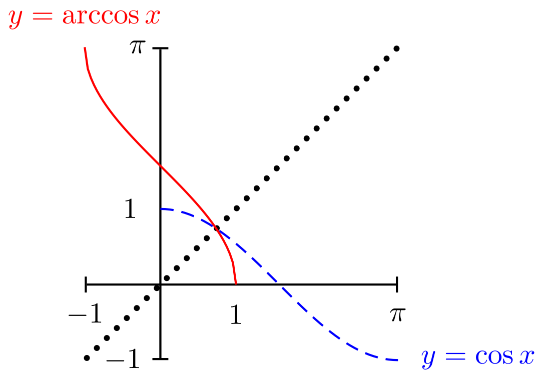
$$\forall x \in [-1; 1], \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Exemple 1
➔ $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ car $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

<u>Démonstration de la dérivée :</u>
Pour tout x de $[-1; 1]$, on a $\sin(\arcsin(x)) = x$.
En dérivant les deux membres, on obtient :
$\arcsin(x)' \times \cos(\arcsin(x)) = 1$ d'où $\arcsin(x)' = \dfrac{1}{\cos(\arcsin(x))}$.
Comme $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin('x))} = \sqrt{1 - x^2}$, on obtient le résultat cherché.

II.3 arc cosinus

Définition 4
La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0;\pi]$. *Elle admet donc sur cet intervalle une fonction réciproque définie sur* $[-1;1]$.
Cette fonction est appelée arc cosinus *et notée* arccos *ou parfois* $\cos^{-1}$.

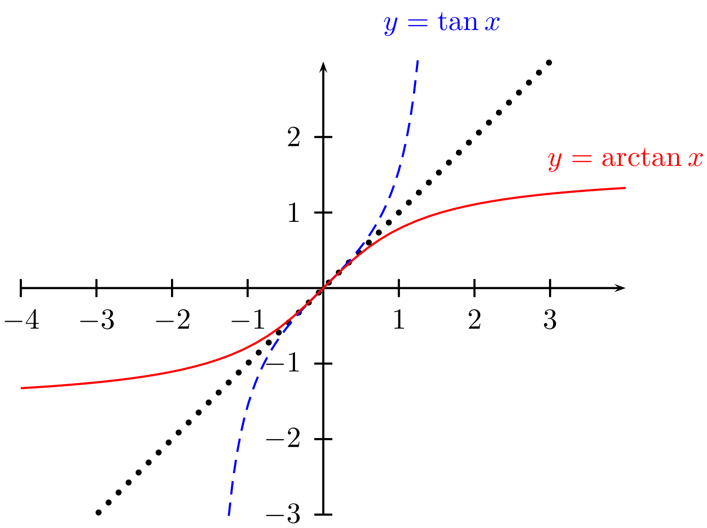


$y = \arccos x$ signifie que y est le réel (l'arc) compris entre 0 et π dont le cosinus vaut x.

$$\forall x \in [-1;1], \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

II.4 arc tangente

Définition 5
La fonction tangente est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. *Elle admet donc sur cet intervalle une fonction réciproque définie sur* $\mathbb{R}$.
Cette fonction est appelée arc tangente *et noté* arctan *ou parfois* $\tan^{-1}$.



$y = \arctan x$ signifie que y est le réel (l'arc) compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ dont la tangente vaut x.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

III Fonctions e^{it} et e^{at}

Définition 6
Pour tout nombre réel θ et tout nombre complexe $a = \alpha + i\beta$, on pose :
- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
- $e^{at} = e^{\alpha t}[\ \cos(\beta t) + ß\sin(\beta t)\ ]$

Démonstration de la seconde égalité :
$e^{at} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}\ e^{i\beta t} = e^{\alpha t}[\ \cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\ ]$.

Remarque 2
On peut retrouver ainsi les formules de Moivre et d'Euler, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

IV Dérivée et primitive d'une fonction à valeurs complexes

Définition 7
Une fonction d'une variable réelle à valeur complexe est une fonction qui à un nombre réel associe un nombre complexe.

Exemple 2
la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3x^2 i$ est à valeur complexe.

Remarque 3
On peut considérer que la fonction f est constituée de deux sous fonctions : $f_1(x) = 2x$ et $f_2(x) = -3x^2$. On a ainsi $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$.

Propriété 3
Soit $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ une fonction continue d'une variable réelle à valeur complexe.
- Si f_1 et f_2 sont dérivables, alors f est dérivable et $f'(t) = f_1'(x) + if_2'(x)$.
- Si F_1 et F_2 sont les primitives de f_1 et f_2 alors F est intégrable et $F(x) = F_1(x) + iF_2(x)$.

Exemple 3
Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3x^2 i$.
- $f'(x) = 2 - 6xi$.
- $F(x) = x^2 - x^3 i$.