PROBABILITÉS

Table des matières

On fait remonter à la correspondance de 1964 entre Pascal et Fermat, sur un problème de jeu de hasard, l'acte de naissance du calcul des probabilités.

Après trois siècles de recherche, le calcul des probabilités a pu fournir, au début du XX^e siècle, les bases théoriques nécessaires au développement de la statistique et a investi de très nombreux domaines de la vie scientifique, économique et sociale.

Le but des probabilités est d'essayer de rationaliser le hasard : quelles sont les chances d'obtenir un résultat suite à une expérience aléatoire ?
Quelles chances ai-je d'obtenir "pile" en lançant une pièce de monnaie ? Quelles chances ai-je d'obtenir "6" en lançant un dé ? Quelles chances ai-je de valider la grille gagnante du loto ?

I Vocabulaire des événements

I.1 Vocabulaire

Définition 1

- *Chaque résultat possible et prévisible d'une expérience aléatoire est appelé éventualité liée à l'expérience aléatoire.*
- *L'ensemble formé par les éventualités est appelé univers, il est très souvent noté Ω.*
- *Un événement d'une expérience aléatoire est une partie quelconque de l'univers,*
- *Un événement ne comprenant qu'une seule éventualité est un événement élémentaire.*
- *L'événement qui ne contient aucune éventualité est l'événement impossible, noté $\varnothing$,*
- *L'événement composé de toutes les éventualités est appelé événement certain.*
- *Pour tout événement A il existe un événement noté $\overline{A}$ et appelé événement contraire de A qui est composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.*
  On a en particulier $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Exemple 1
Lancer d'un dé à six faces :

- "obtenir 2" est une éventualité de cette expérience aléatoire.
- Univers : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- $A =$ "obtenir un 5" est un événement élémentaire que l'on peut noter $A = \{5\}$,
- $B =$ "obtenir un numéro pair" est un événement que l'on peut noter $B = \{2; 4; 6\}$.
- "obtenir 7" est un événement impossible,
- "obtenir un nombre positif" est un événement certain.
- $\overline{B} =$ "obtenir un nombre impair" est l'événement contraire de A,

Dans toute la suite du cours, on suppose que Ω est l'univers associé à une expérience aléatoire, et A et B deux événements associés à cet univers.

I.2 Intersection et réunion d'événements

Définition 2

- *Intersection d'événements : événement constitué des éventualités appartenant à A et à B noté $A \cap B$ (se lit "A inter B" ou "A et B"),*
- *Réunion d'événements : événement constitué des éventualités appartenant à A ou à B noté $A \cup B$ (se lit "A union B" ou "A ou B").*

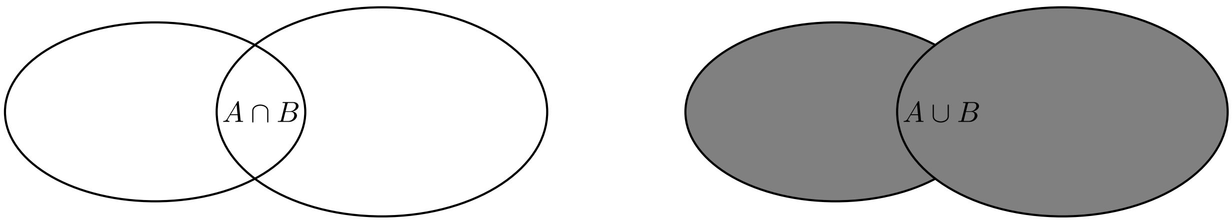
Remarque 1
Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que les événements sont disjoints ou incompatibles.

Exemple 2
On considère l'ensemble des chiffres.
On note A l'événement "obtenir un chiffre pair" et B l'événement "obtenir un chiffre strictement inférieur à six"

- $A \cap B =$ "obtenir un chiffre pair et inférieure strictement à six" : $A \cap B = \{2; 4\}$,
- $A \cup B =$ "obtenir un chiffre pair ou inférieur strictement à six" : $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10\}$.

I.3 Représentation des évenements

Diagrammes ou patates



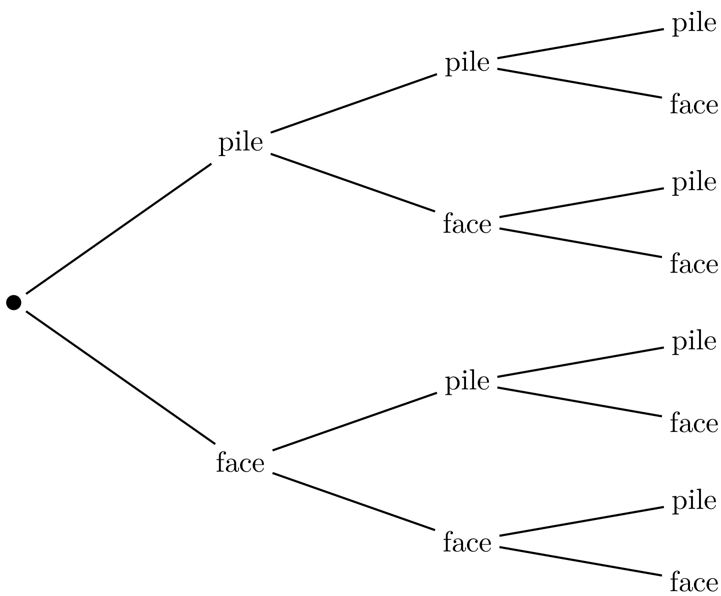
Tableaux

On jette deux dés à quatre faces (tétraèdre régulier) et on calcule la produit obtenu :

	1	**2**	**3**	**4**
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

Arbres

On lance une pièce de monnaie trois fois se suite, on peut schématiser cette expérience par un arbre :



II Calcul de probabilités

Définition 3

- *La probabilité d'un événement d'univers Ω est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constitue.*
- *On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité.*
  Dans ce cas, on a : $P(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.

Remarque 2
Dans un exercice, pour signifier qu'on est dans une situation d'équiprobabilité on a généralement dans l'énoncé un expression du type :
- on lance un dé non pipé,
- dans une urne, il y a des boules indiscernables au toucher,
- on rencontre au hasard une personne parmi ...

Propriété 1
Soit A et B deux événements, on a les propriétés suivantes :
- $P(\varnothing) = 0$.
- $P(\Omega) = 1$.
- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemple 3
On considère l'ensemble E des entiers de 1 à 20. On choisit l'un de ces nombres au hasard.
A est l'événement : « le nombre est multiple de 3 » :
- $A = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$,

B est l'événement : « le nombre est multiple de 2 » :
- $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$,

Calul des probabilités :
- $P(A) = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10} = 0,3$.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{3}{10} = \dfrac{7}{10} = 0,7$.
- $P(B) = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2} = 0,5$.
- $P(A \cap B) = \dfrac{3}{20} = 0,15$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{6}{20} + \dfrac{10}{20} - \dfrac{3}{20} = \dfrac{13}{20} = 0,65$.

III Probabilités conditionnelles

III.1 Définition

Définition 4
On suppose que $P(B) \neq 0$.

➤ *On appelle probabilité conditionnelle de A relativement à B ou de A sachant B la probabilité que l'événement A se réalise sachant que B est réalisé.*

➤ *Cette probabilité vaut* $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Remarque 3
On trouve aussi la notation $P(A/B)$ pour $P_B(A)$.

Exemple 4
On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé à 6 faces, équilibré. On suppose que toutes les faces sont équiprobables, et on définit les événements :
- B : "la face obtenue porte un numéro pair" ;
- A : "la face obtenue porte un numéro multiple de 3".

Déterminons la probabilité d'obtenir un numéro multiple de 3, sachant qu'on a un numéro pair de deux manières différentes.

➜ L'événement (A/B) correspond à l'événement "obtenir un numéro multiple de 3" parmi les éventualités de B, autrement dit parmi $\{2;4;6\}$. Il n'y a donc que l'issue "obtenir 6" qui correspond.
Et comme on est en situation d'équiprobabilité, on obtient $P_B(A) = \dfrac{1}{3}$.

➜ Par le calul, on a $P(B) = \dfrac{3}{6}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$ donc, d'après la formule : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

III.2 Propriétés

Propriété 2
Pour tous événements A et B de probabilité non nulle, on a :

$$P(A \cap B) = P(B)P_B(A) = P(A)P_A(B).$$

Démonstration : Pour $P(B) \neq 0$ et $P(A) \neq 0$, on peut écrire :

- $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ d'où $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$.
- $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ d'où $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.

Propriété 3
Soit S un événement de probabilité non nulle, on a :
- $0 \leq P_S(A) \leq 1$;
- $P_S(\Omega) = 1$;
- $P_S(\varnothing) = 0$;
- $P_S(\bar{A}) = 1 - P_S(A)$;
- $P_S(A \cup B) = P_S(A) + P_S(B) - P_S(A \cap B)$;
- Si A et B sont des événements incompatibles, alors $P_S(A \cup B) = P_S(A) + P_S(B)$;
- $P_S(\overline{A} \cap \overline{B}) = P_S(\overline{A \cup B}) = 1 - P_S(A \cup B)$.

Remarque 4
Ce théroème revient à dire qu'une probabilité conditionnelle relative à un événement S a toutes les propriétés habituelles du calcul des probabilités.

Propriété 4 (Formule des probabilités totales)
Pour tous A et B de probabilité non nulle :

$$P(A) = P_B(A)P(B) + P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B}).$$

Démonstration :
$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P_B(A)P(B) + P_{\overline{B}}(A)P(\overline{B})$.

III.3 Exemple de calcul de probabilités conditionnelles par différentes méthodes

Exemple 5
Dans un atelier, deux machines M_1 et M_2 découpent des pièces métalliques identiques. M_1 fournit 60% de la production (parmi lesquelles $6,3\%$ sont défectueuses), le reste étant fourni par M_2 (dont 4% de la production est défectueuse).
La production du jour est constituée des pièces produites par les deux machines, et on en tire en fin de soirée une pièce au hasard (tous les prélèvements sont supposés équiprobables).

1. Utilisation des formules des probabilités conditionnelles.
   (a) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_1 ?
   (b) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_2 ?
   (c) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse ?
2. Utilisation d'un tableau
   On suppose maintenant que la production est composée de 10000 pièces.
   (a) Reproduire et compléter le tableau suivant qui décrit la production du jour :

	Nombre de pièces produites par M_1	Nombre de pièces produites par M_2	Total
Nombre de pièces défectueuses			
Nombre de pièces conformes			
Total			

(b) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_1 ?

(c) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_2 ?

(d) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse ?

3. Utilisation d'un arbre des probabilités conditionnelles

(a) Dresser un arbre des probabilités conditionnelles relatif à la situation proposée.

(b) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_1 ?

(c) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_2 ?

(d) Quelle est la probabilité de prélever une pièce défectueuse ?

Solution

Soit D l'événement "La pièce prélevée est défectueuse"

1. (a) $P_{M_1}(D) = 0,063.$

(b) $P_{M_2}(D) = 0,040.$

(c) $P(D) = P(M_1 \cap D) + P(M_2 \cap D)$
$= P(M_1)P_{M_1}(D) + P(M_2)P_{M_2}(D)$
$= 0,6 \times 0,063 + 0,4 \times 0,040$
$= 0,0538.$

2. (a)

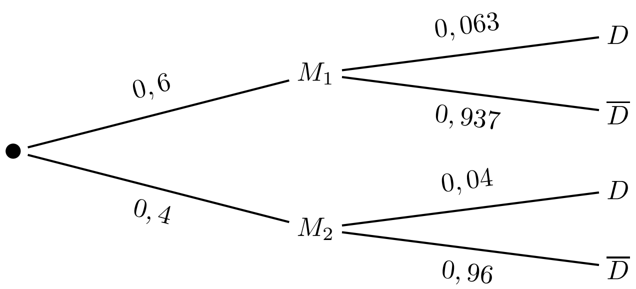
	Nombre de pièces produites par M_1	Nombre de pièces produites par M_2	Total
Nombre de pièces défectueuses	378	160	538
Nombre de pièces conformes	5622	3840	9462
Total	6000	4000	10000

(b) $P_{M_1}(D) = \dfrac{378}{6000} = 0,063.$

(c) $P_{M_2}(D) = \dfrac{1600}{4000} = 0,040.$

(d) $P(D) = \dfrac{538}{10000} = 0,0538.$

3. (a) arbre de probabilités pondéré :



(b) $P_{M_1}(D) = 0,063$ d'après l'arbre de probabilités.

(c) $P_{M_2}(D) = 0,040$ d'après l'arbre de probabilités.

(d) $P(D) = P(M_1 \cap D) + P(M_2 \cap D)$
$= P(M_1)P_{M_1}(D) + P(M_2)P_{M_2}(D)$
$= 0,6 \times 0,063 + 0,4 \times 0,040$
$= 0,0538.$

III.4 Evénements indépendants

Définition 5
On dit que A et B sont des événements indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Exemple 6
On considère le tirage au hasard d'une carte d'un jeu de 32 cartes.
A = "Tirer un as", B = "Tirer un coeur" et C = "Tirer un as rouge".
Indépendance de A et B :

- $P(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$.
- $P(B) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$.
- $P(A \cap B) = \dfrac{1}{32} = P(A) \times P(B)$, les événements A et B sont donc indépendants.

Indépendance de B et C :

- $P(B) = \dfrac{1}{4}$.
- $P(C) = \dfrac{2}{32} = \dfrac{1}{16}$.
- $P(B \cap C) = \dfrac{1}{32} \neq P(B) \times P(C)$, les événements B et C ne sont donc pas indépendants.

Remarque 5
Dans le cas où A et B sont des événements de probabilités non nulles, on a
- $P(A \cap B) = P(B)P_B(A) = P(A)P_A(B) = P(A).P(B)$, d'où :
- $P_B(A) = P(A)$ et $P_A(B) = P(B)$.

Propriété 5
Si A et B sont des événements indépendants, alors : A et $\overline{B}$; $\overline{A}$ et B ; $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont également des événements indépendants.

IV Dénombrement

Le problème du calcul de probabilités se réduit souvent à un problème de dénombrement (nombre des issues possibles, nombre de cas favorables ...). Voici différentes méthodes de dénombrement :

IV.1 Utilisation de tableaux

Exemple 7

Voici les résultats d'un sondage effectué au début de l'année 1998 auprès de 1 000 personnes, à propos d'Internet :

- 40% des personnes interrogées déclarent être intéressées par Internet ;
- 35% des personnes interrogées ont moins de 25 ans et, parmi celles-ci, 80% déclarent être intéressées par Internet ;
- 30% des personnes interrogées ont plus de 50 ans et, parmi celles-ci, 85% ne sont pas intéressées par Internet.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	Intéressés par Internet	Non intéressés par Internet	Total
Moins de 25 ans		70	
De 25 à 50 ans			
Plus de 50 ans			
Total			

2. On choisit au hasard une personne parmi les 1000 interrogées. On suppose que toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies. On considère les événements :
   A : "la personne interrogée est intéressée par Internet" ;
   B : "la personne interrogée a moins de 25 ans".
   (a) Calculer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$.
   (b) Définir par une phrase l'événement contraire de B, puis calculer sa probabilité.
   (c) Définir par une phrase l'événement $A \cap B$, puis calculer $P(A \cap B)$. En déduire $P(A \cup B)$.
   (d) On sait maintenant que la personne interrogée n'est pas intéressée par Internet. Quelle est la probabilité qu'elle ait moins de 50 ans ?

Solution

1.

	Intéressés par Internet	Non intéressés par Internet	Total
Moins de 25 ans	280	70	350
De 25 à 50 ans	75	275	350
Plus de 50 ans	45	255	300
Total	400	600	1000

2. (a) $P(A) = \dfrac{400}{1000} = \dfrac{2}{5} = 0,4$ et $P(B) = \dfrac{350}{1000} = \dfrac{7}{20} = 0,35$.
   (b) $\overline{B}$: "La personne choisie à 25 ans ou plus" et $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \dfrac{7}{20} = \dfrac{13}{20} = 0,65$
   (c) $A \cap B =$ "la personne intérrogée est intéressée par Internet ET a moins de 25 ans".
   $P(A \cap B) = \dfrac{250}{1000} = \dfrac{1}{4} = 0,25.$
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{400}{1000} + \dfrac{350}{1000} - \dfrac{250}{1000} = \dfrac{500}{1000} = \dfrac{1}{2} = 0,5.$
   (d) $P = \dfrac{70 + 275}{600} = \dfrac{345}{600} = \dfrac{23}{40} = 0,575.$

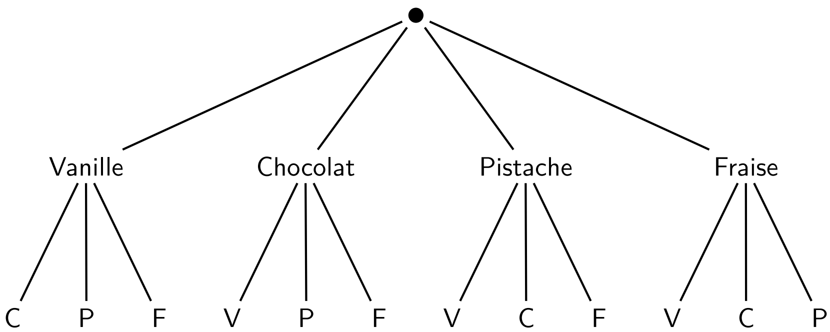
IV.2 Utilisation d'arbres

Exemple 8
Benoît sait que le congélateur de la cuisine renferme quatre bâtons de crème glacée, de quatre parfums différents (vanille, chocolat, pistache, fraise).
Gourmand et insomniaque, il décide de se lever en pleine nuit, sans allumer la lumière, et de prendre, à tâtons et successivement, deux bâtons dans le congélateur.
Tous les choix sont équiprobables.

1. À l'aide d'un arbre, déterminer le nombre de couples différents de bâtons qu'il peut ainsi obtenir.
2. Ses parfums préférés sont vanille et fraise. Calculer les probabilités qu'il obtienne :
   (a) le bâton à la vanille, puis le bâton au chocolat ;
   (b) les bâtons de ses parfums préférés dans un ordre quelconque ;
   (c) un seul de ses parfums préférés ;
   (d) aucun de ses parfums préférés.

Solution

1. d'après l'arbre, on obtient $4 \times 3 = 12$ possibilités.



2. Toutes les situations étant équiprobables, donc, on a :
   (a) $P = \dfrac{1}{12}$.
   (b) $P = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.
   (c) $P = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$.
   (d) $P = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

IV.3 Permutations

Définition 6
On réalise une <u>*permutation*</u> *si on écrit tous les éléments d'un ensemble dans un ordre déterminé.*

Exemple 9
On considère 4 pions de couleurs, respectivement verte (V), rouge (R), bleue (B) et noire (N). On souhaite aligner les pions les uns derrière les autres. De combien de manières différentes (par l'ordre des couleurs) peut-on le faire ?

- ➔ Pour la première position, il y a 4 couleurs possibles. Pour la seconde, il n'y en a plus que 3. Pour la troisième position, il ne reste plus que deux possibilités de couleurs, et pour la dernière position, il ne restera qu'une couleur, la dernière. Un arbre permet de décrire complètement ce schéma.
- ➔ Il y a donc au total $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ possibilités d'ordonner les 4 pions de couleurs différentes.

Définition 7
Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle factorielle n le nombre noté $n!$ qui vaut $n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$.
Par convention, $0! = 1$.

Exemple 10

- $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.
- $6! = 1 \times 2 \times \cdots \times 5 \times 6 = 720$.
- $8! = 1 \times 2 \times \cdots \times 7 \times 8 = 40320$.

Remarque 6

- $5!$ se lit "factorielle 5", et non pas "5 factorielle" !
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Exemple 11
On peut simplifier les expressions contenant des factorielles :

- $\dfrac{15!}{12!} = 15 \times 14 \times 13 = 2730$.
- $\dfrac{7!}{5!2!} = \dfrac{7 \times 6}{2} = 21$.
- $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = (n+1)n = n^2 + n$.

Exemple 12
Inversement, on peut réduire un calcul grâce aux factorielles :

- $1 \times 5 \times 3 \times 2 \times 4 = 5!$.
- $4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = \dfrac{8}{3}$.
- $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 4 \times 6 \times 8} = \dfrac{9!}{2^4 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4} = \dfrac{9!}{2^4 \times 4!}$.
- $2 \times 4 \times 6 \times ... \times (2n-2) \times (2n) = 2^n \times 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times (n) = 2^n \times n!$.

Propriété 6
Le nombre de permutations de n éléments est $n!$.

Remarque 7
On dit aussi qu'il y a $n!$ façons de ranger n objets dans n cases, de manière à placer tous les objets dans une et une seule case.

Exemple 13
Faire un emploi du temps d'une classe de BTS consiste (grossièrement) à placer 16 blocs de 2 heures, dans un planning hebdomadaire vierge, qui compte 16 créneaux de 2 heures. On peut déterminer le nombre d'emplois du temps différents que l'on peut constituer :
- de manière exacte ;
- en en donnant un ordre de grandeur :

- $16! = 20922789888000$;
- soit environ 21000 milliards ...

IV.4 Combinaisons

Définition 8
Soient n et p deux entiers naturels.

- *on appelle <u>combinaison</u> de p éléments parmi n le fait de prélever p éléments parmi n, de manière à constituer un groupe dans lequel l'ordre n'a pas d'importance.*
- *Ce nombre de combinaison vaut :* $\displaystyle\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & si\ p \leq n \\ 0\ sinon \end{cases}$

Remarque 8

- Si l'on s'intéresse à la constitution d'un groupe ordonné, on parle d'<u>arrangement</u>, au lieu de combinaison.
- On trouve aussi la notation aussi C_n^p au lieu de $\displaystyle\binom{n}{p}$.

Exemple 14
Calcul des combinaisons $\displaystyle\binom{5}{k}$ pour k variant de 0 à 5 :

- $\displaystyle\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!(5-0)!} = \frac{5!}{0!5!} = 1.$
- $\displaystyle\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{5!}{1!4!} = 5.$
- $\displaystyle\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$
- $\displaystyle\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = 10.$
- $\displaystyle\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5!}{4!1!} = 5.$
- $\displaystyle\binom{5}{5} = \frac{5!}{5!(5-5)!} = \frac{5!}{5!0!} = 1.$

Exemple 15
On tire 5 cartes au hasard dans un jeu de 32, pour constituer une main (sans tenir compte de l'ordre d'arrivéedes cartes).

- Il y a $\displaystyle\binom{32}{5} = 201376$ mains possibles.
- Il y a $\displaystyle\binom{4}{3} \times \binom{28}{2} = 4 \times 378 = 1512$ mains contenant 3 rois exactement.

Propriété 7
Soient n et p des entiers naturels tels que $p \leq n$, on a les propriétés suivantes :

- $\displaystyle\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$
- Symétrie : $\displaystyle\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$
- Relation de Pascal : $\displaystyle\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$

Triangle de pascal :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

donne :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & \boxed{1} & + & \boxed{2} & & 1 & & \\
 & 1 & & \boxed{3} & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Propriété 8 (Formule du binôme de Newton)
Pour tous réels a et b et tout entier naturel n, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$$

.

Exemple 16
Développons $(x+2)^4$:

- ➔ $(x+2)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} x^k\, 2^{4-k}$.
- ➔ Le triangle de pascal nous donne les coefficients : pour $n = 4$, on obtient respectvement 1 - 4 - 6 - 4 - 1.
- ➔ Donc : $(x+2)^4 = 1 \times 2^4 \times x^0 + 4 \times 2^3 \times x^1 + 6 \times 2^2 \times x^2 + 4 \times 2^1 \times x^3 + 1 \times 2^0 \times x^4$
  $= 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$.