FONCTIONS

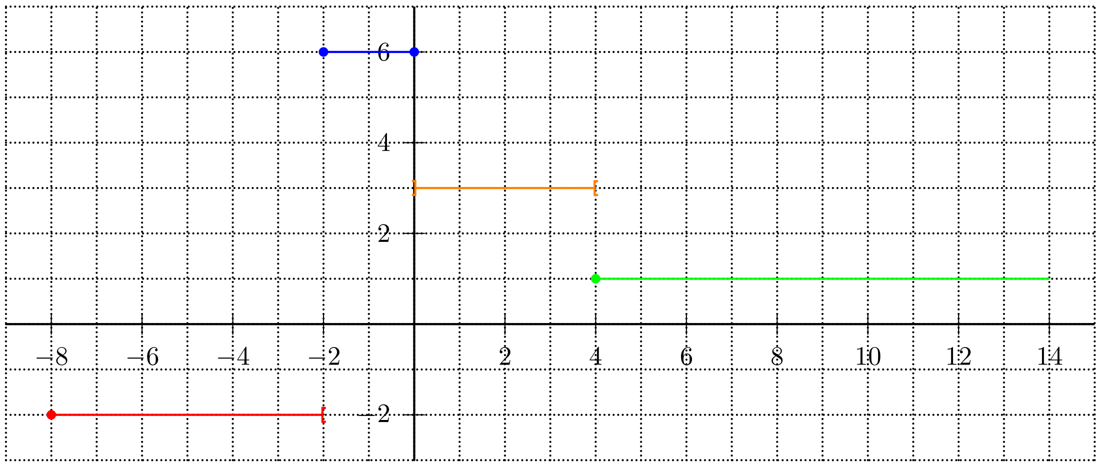
Table des matières

I Fonctions usuelles

I.1 Fonctions en escalier

Définition 1
Une fonction en escalier est une fonction constante par intervalles.

Exemple 1
La fonction définie sur $[-8\ ;+\infty\ [$ par $f(x)=\begin{cases} -2 & \text{si} \quad -8 \leq x < -2 \\ 6 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ 3 & \text{si} \quad 0 < x < 4 \\ 1 & \text{si} \quad 4 \leq x \end{cases}$ est une fonction en escalier.



I.2 Fonctions affines

Définition 2
a et b sont deux réels donnés. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ est appelée <u>fonction affine</u>.
Sa représentation graphique est la droite d'équation $y=ax+b$, où :

- *Le réel a est le coefficient directeur de cette droite.*
- *Le réel b est l'ordonnée à l'origine.*

Une fonction affine est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x)=a$. D'où les tableaux de variation suivants :

$a>0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
signe de f	$-$	0	$+$

$a<0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$
signe de f	$-$	0	$+$

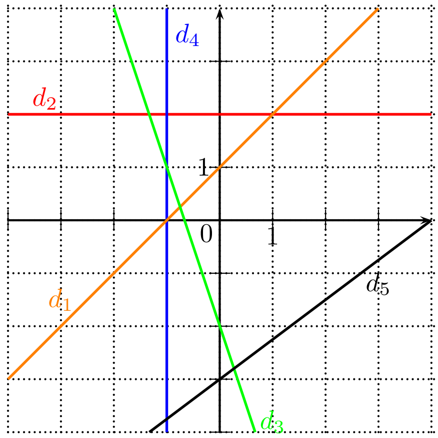
Exemple 2
Le graphique ci-contre représente les droites d'équation :
$d_1 : y = x + 1$

$d_2 : y = 2$

$d_3 : y = -3x - 2$

$d_4 : x = -1$

$d_5 : y = \frac{3}{4}x - 3$



I.3 Fonction logarithme

Définition 3
La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, *est l'unique primitive de la fonction* $x \to \frac{1}{x}$ *définie sur* $]\,0\,;\,+\infty\,[$ *qui s'annule en* 1.

Conséquences directes :
- $\ln(1) = 0$,
- la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Propriété 1
Soient a et b deux réels strictement positifs et n est un entier naturel, alors :
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$.
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

En résumé, le logarithme népérien a la particularité de transformer les produits en sommes, les quotients en différences et les puissances en multiplications.

Exemple 3
Transformations d'expressions numériques et algébriques :
- $\ln\left(\frac{192}{108}\right) = \ln\left(\frac{16}{9}\right) = \ln(16) - \ln(9) = \ln(2^4) - \ln(3^2) = 4\ln(2) - 2\ln(3)$.
- $\ln(\sqrt{96}) = \frac{1}{2}\ln(96) = \frac{1}{2}\ln(2^5 \times 3) = \frac{1}{2}[5\ln(2) + \ln(3)]$.
- $\ln(x+3) + \ln(2x+1) = \ln[(x+3)(2x+1)] = \ln(2x^2 + 7x + 3)$ pour $x \in -\left]\,\frac{1}{2}\,;\,+\infty\,\right[$.

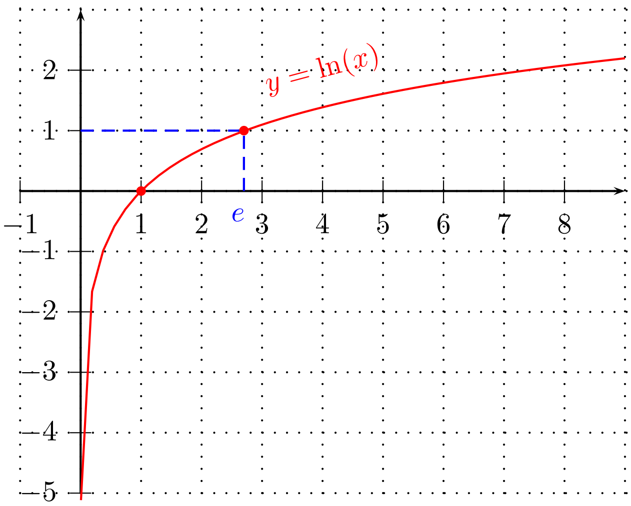
Propriété 2
On a les limites importantes suivantes :

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Conséquence : La droite $x = 0$ est donc asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction ln.

D'où le tableau de variations et la courbe :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
signe	$-$	0	$+$



I.4 Fonction exponentielle

Définition 4
La fonction exponentielle, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp(x) = e^x$, e^x étant l'unique nombre réel positif dont le logarithme vaut x.

Remarque 1
On dit que la fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme, ce qui signifie que graphiquement, les courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice $(y = x)$ dans un repère othonormal.

Conséquences directes :

- $\exp(x) > 0$.
- $\exp(1) = e^1 = e \approx 2,718$.
- $\ln(e^x) = x$.
- $e^{\ln x} = x$ pour $x > 0$.
- $x \in \mathbb{R}$ et $y = e^x \iff y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln(y) = x$.

Propriété 3
Soient a et b deux réels et n est un entier relatif, alors :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$.
- $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.
- $(e^a)^n = e^{an}$.

En résumé, l'exponentielle à la particularité de transformer les sommes en produits, les différences en quotients et les multiplications en puissances. (inversement au logarithme !).

Exemple 4
Transformations d'expressions numériques et algébriques :

- $e^2 \times e^3 \times \dfrac{1}{e^4} \times (e^{-2})^{-3} = e^{2+3-4+6} = e^7$.
- $e^{x+3} \times e^{2x+1} = e^{(x+3)+(2x+1)} = e^{3x+4}$.
- $(e^{x-2})^2 = e^{2x-4}$.

Propriété 4
On a les limites importantes suivantes :

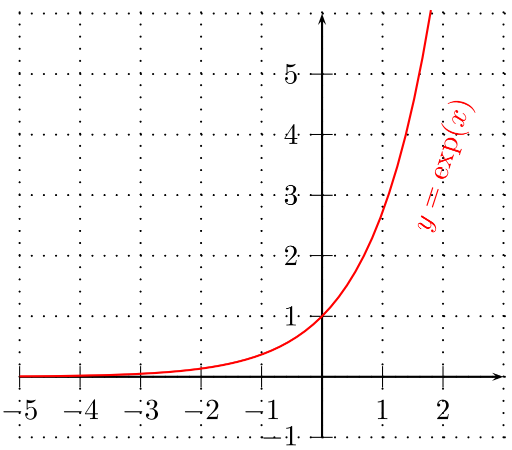
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Conséquence : La droite d'équation $y = 0$ est donc une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction exp.

Propriété 5
La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $(e^x)' = e^x$.

D'où le tableau de variations et la courbe :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$
signe		$+$	



I.5 Fonctions puissance

Définition 5
Soit α un nombre réel, la fonction puissance (d'exposant) α, notée f_α est la fonction qui, à tout nombre $x \in \mathbb{R}_+^*$ associe

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

Exemple 5
Dans le cas où $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on a $f_{\frac{1}{2}}(x) = x^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln x} = \sqrt{x}$.

Propriété 6
Pour tout α, la fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Sens de variation :
Dans le cas où $\alpha = 0$, la fonction $f_0(x) = x^0 = 1$ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dans le cas où $\alpha \neq 0$, $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ est du signe de α sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'où les tableaux de variation suivants :

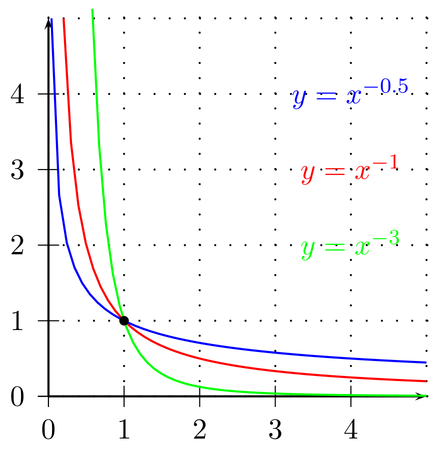
$\alpha < 0$

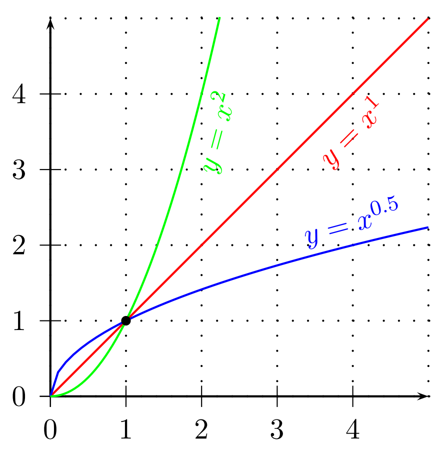
x	0		$+\infty$
signe de $f'_\alpha(x)$		$-$	
variations de f_α	$+\infty$	$\searrow$	0
signe de f_α		$+$	

$\alpha > 0$

x	0		$+\infty$
signe de $f'_\alpha(x)$		$+$	
variations de f_α	0	$\nearrow$	$+\infty$
signe de f_α		$+$	

Allure des courbes représentatives des fonctions puissance :

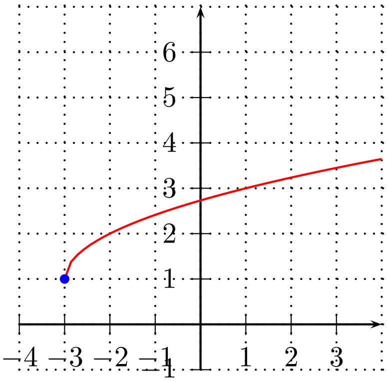




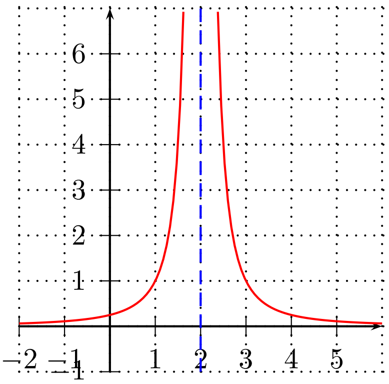
II limites

II.1 Interprétation graphique

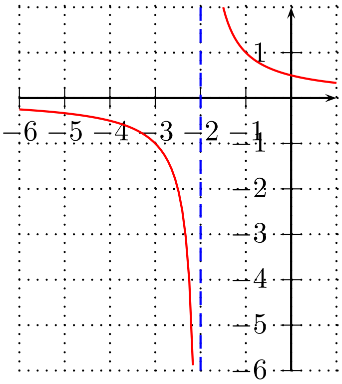
Limite en un point :



$\lim_{x \to -3} f(x) = 1$
Il n'y a pas d'asymptote.

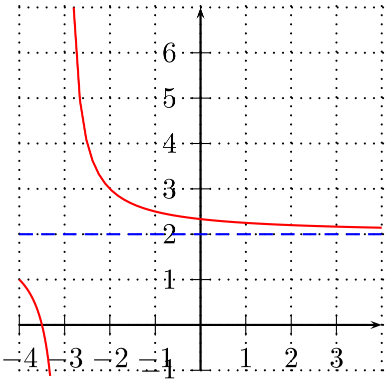


$\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$
La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

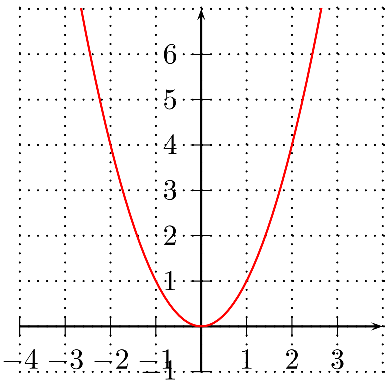


$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$
La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

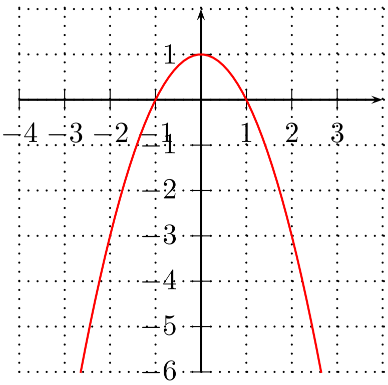
Limite en $+\infty$:



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$
La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

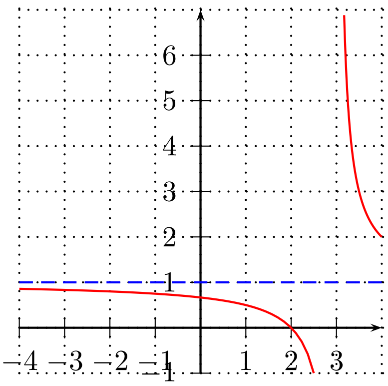


$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
Il n'y a pas d'asymptote.

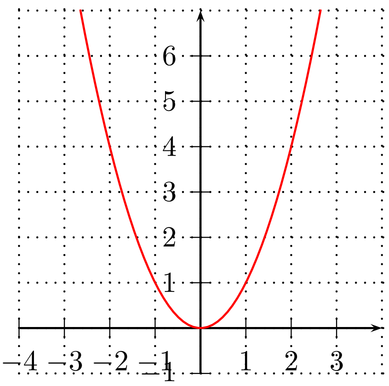


$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
Il n'y a pas d'asymptote.

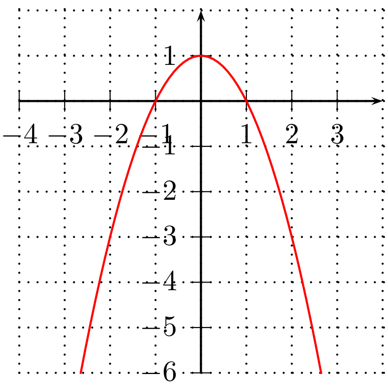
Limite en $-\infty$:



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$
La courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
Il n'y a pas d'asymptote.



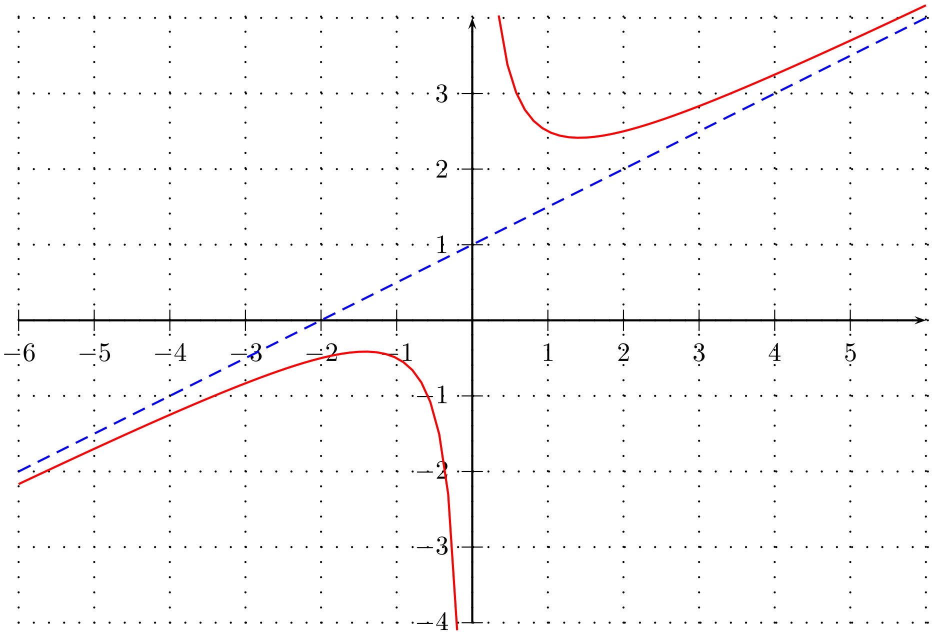
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
Il n'y a pas d'asymptote.

Définition 6
Soit f une fonction et d la droite d'équation $y = ax + b$ tel que :

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

on dit alors que la droite d est une <u>*asymptote oblique*</u> *à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.*

Exemple 6
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x + 1$.



$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x+1\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

La courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

II.2 Limites des fonctions usuelles

Voici un tableau qui résume les différentes limites des fonctions de référence (la notation « $*$ »signifie qu'il faut appliquer la « règle des signes »).

$f(x)$	x^n $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{N}$	x^α $\alpha \in \mathbb{R}^+$	$\dfrac{1}{x^\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}^+$	$\ln x$	$\exp x$	$\cos x$	$\sin x$
$\lim_{x\to-\infty} f(x)$	$*\infty$	0^*	indéfini	indéfini	indéfini	0^+	aucune	aucune
$\lim_{x\to 0^-} f(x)$	0^*	$*\infty$	indéfini	indéfini	indéfini	1^-	1^-	0^-
$\lim_{x\to 0^+} f(x)$	0^+	$+\infty$	0^+	$+\infty$	$-\infty$	1^+	1^+	0^+
$\lim_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	0^+	$+\infty$	0^+	$+\infty$	$+\infty$	aucune	aucune

II.3 Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit, la notation « FI » désigne une Forme Indéterminée, c'est à dire qu'on ne sait pas calculer par une opération élémentaire.

II.3.1 Limite d'une somme

$\lim\ f$	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\ g$	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\ (f+g)$	$l+l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exemple 7
Calcul de « sommes » de limites :

➔ $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to 0} e^x & = & 1\\ \lim\limits_{x\to 0} x^3 & = & 0\end{array}\right\}\ \lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x^3\right)=1.$

➔ $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0^-\\ \lim\limits_{x\to -\infty} x^2 & = & +\infty\end{array}\right\}\ \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{x}+x^2\right)=+\infty$

➔ $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x & = & +\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 & = & +\infty\end{array}\right\}\ \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln x+x^2\right)=+\infty.$

➔ $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to -\infty} x & = & -\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 & = & -\infty\end{array}\right\}\ \lim\limits_{x\to -\infty}\left(x+x^3\right)=-\infty.$

➔ $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 & = & +\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 & = & -\infty\end{array}\right\}\ \lim\limits_{x\to -\infty}\left(x^2+x^3\right)$ est une forme indéterminée du type $\infty-\infty$.

II.3.2 Limite d'un produit

$\lim\ f$	l	$l\neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\ g$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\ (f\times g)$	$l\times l'$	$*\infty$	$*\infty$	FI

Exemple 8
Calcul de « produit » de limites :

➔ $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to 0} (e^x+3) & = & 4\\ \lim\limits_{x\to 0} (e^x-2) & = & -1\end{array}\right\}\ \lim\limits_{x\to 0}\left[(e^x+3)\times(e^x-2)\right]=-4.$

➔ $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to 0^+} (x-3) & = & -3\\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} & = & +\infty\end{array}\right\}\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x-3)\times\dfrac{1}{x}\right]=-\infty$

➔ $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to -\infty} (x-1) & = & -\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 & = & -\infty\end{array}\right\}\ \lim\limits_{x\to -\infty}\left[(x-1)\times x^3\right]=+\infty.$

➔ $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2+1) & = & +\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0^-\end{array}\right\}\ \lim\limits_{x\to -\infty}\left[(x^2+1)\times\dfrac{1}{x}\right]$ est une forme indéterminée du type $0\times\infty$.

II.3.3 Limite d'un quotient

$\lim f$	l	l	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	l'	$\pm\infty$	0
$\lim \left(\dfrac{f}{g}\right)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$*\infty$	$*\infty$	FI	FI

Exemple 9
Calcul de « quotients » de limites :

- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0} (e^x+3) & = & 4 \\ \lim\limits_{x\to 0} e^x-2) & = & -1 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^x+3}{e^x-2}\right) = e^5.$
- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}-3\right) & = & -3 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 & = & +\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\frac{1}{x}-3}{x^2}\right) = 0^-.$
- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0^+} x-4 & = & -4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x & = & 0^+ \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x-4}{x}\right) = -\infty.$
- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (x-1) & = & -1 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\ln x}{x-1}\right) = +\infty.$
- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to -\infty} (x-1) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 & = & -\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x-1}{x^3}\right)$ est une forme indéterminée.
- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0} x^2 & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} & = & 0 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}\right)$ est une forme indéterminée .

II.3.4 Compositions

Propriété 7
Soient deux fonctions : f définie de I dans J et g de J dans $\mathbb{R}$.

Si $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to b} g(x) = c \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{x\to a} (g\circ f)(x) = \lim\limits_{x\to a} g[f(x)] = c.$

Exemple 10
Calcul de "composition" de limites :

- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to -\infty} (x+3) & = & -\infty \\ \lim\limits_{X\to -\infty} e^X & = & 0 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x+3} = 0.$
- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to +\infty} (2x+1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \ln X & = & +\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(2x+1) = +\infty.$
- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0} (x+4) & = & 4 \\ \lim\limits_{X\to 4} \sqrt{X} & = & 2 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x+4} = 2.$

II.4 Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

Dans ce cas, toutes les situations sont *a priori* possibles : existence d'une limite finie, nulle ou non ; existence d'une limite infinie ; absence de limite.
Seule une étude particulière permet de lever l'indétermination.

Rappelons pour commencer les cas d'indétermination des limites :

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	Limite indéterminée	type d'indétermination
$+\infty$	$-\infty$	$f(x)+g(x)$	$\infty-\infty$
0	$\pm\infty$	$f(x)\times g(x)$	$0\times\infty$
0	0	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{0}{0}$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\infty}{\infty}$

Exemple 11
Indétermination du type « $\infty-\infty$ » :

➔ $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x & = & -\infty\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2-x)$ est une forme indéterminée du type $\infty-\infty$.

➔ On met x^2 en facteur : $f(x)=3x^2-x=x^2\left(3-\dfrac{1}{x}\right)$.

➔ $\left.\begin{array}{lcr}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(3-\dfrac{1}{x}\right) & = & 1\end{array}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Remarque 2
De manière générale, le comportement d'une fonction polynomiale en $\pm\infty$ est dictée par le comportement de son terme de plus haut degré en $\pm\infty$.

Exemple 12
Indétermination du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » :

➔ $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+2x+1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (2x^2-3) & = & +\infty\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{2x^2-3}\right)$ est une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » .

➔ Pour $x\neq 0$, on factorise par la puissance de x maximale et on simplifie :

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{2x^2-3}=\frac{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\dfrac{3}{x^2}\right)}=\frac{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{3}{x^2}}.$$

➔ $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right) & = & 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\frac{3}{x^2}\right) & = & 2\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$.

Remarque 3
De manière générale, le comportement d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$ est dictée par le comportement du quotient des deux termes de plus haut degré.

Exemple 13
Indétermination du type « $0 \times \infty$ » :

- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+1) & = & +\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{1}{x}(x^2+1)\right]$ est une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$ ».
- On développe : $f(x) = \dfrac{1}{x}(x^2+1) = x + \dfrac{1}{x}$.
- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x \to +\infty} x & = & +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0^+ \end{array}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exemple 14
Indétermination du type « $\dfrac{0}{0}$ » :

- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x \to 1} (x^2-1) & = & 0 \\ \lim\limits_{x \to 1} (x-1) & = & 0 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$.
- On factorise : $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$.
- $\lim\limits_{x \to 1} (x-1) = 0$ donc : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

II.5 Croissance comparée de l'exponentielle, du logarithme et des fonctions puissance

Propriété 8
Pour tout nombre réel α strictement positif :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x^\alpha}\right) = 0$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x^\alpha}\right) = +\infty$.

L'idée à retenir : Au voisinage de $+\infty$, les fonctions $x \to \ln x$, $x \to x^\alpha$ et $x \to e^x$ prennent des valeurs qui se classent dans cet ordre de la plus petite à la plus grande.

III Dérivation

Dans cette partie, f est une fonction numérique définie sur un intervalle I, C sa courbe représentative dans un repère. a et x sont deux réels distincts de I

III.1 Nombre dérivé en un point

On souhaite trouver une fonction affine (droite) qui réalise une bonne approximation de la fonction f au voisinage d'un point d'une courbe.

Exemple 15
Pour h voisin de 0, on a :

- $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$ donc, quand h tend vers 0 : $(1+h)^2 \approx 1 + 2h$.
- $(1+h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3$ donc, quand h tend vers 0 : $(1+h)^3 \approx 1 + 3h$.
- $\dfrac{1}{1+h} = 1 - h + \dfrac{h^2}{1+h}$ donc, quand h tend vers 0 : $\dfrac{1}{1+h} \approx 1 - h$.

Définition 7
Soit f une fonction définie en a et au voisinage de a, on dit que f est dérivable en a s'il existe un réel A est une fonction ϵ tels que, au voisinage de $h = 0$, on a :

$$f(a+h) = f(a) + Ah + h\epsilon(h), \text{ avec } \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0.$$

A est appelé nombre dérivé de f en a.

Exemple 16
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

- $f(a+h) = (a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 = f(a) + (2a)h + h(h)$.
- Donc, f est dérivable en a de nombre dérivé $A = 2a$ et $\epsilon(h) = h$ de limite nulle en 0.

Définition 8

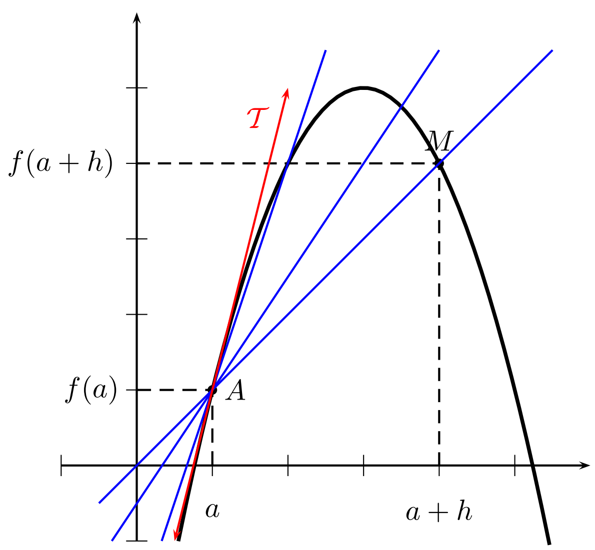
- *Le taux de variation de la fonction f entre a et x est le quotient : $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.*
- *Avec $x = a + h$, ce quotient s'écrit aussi : $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.*
- *f est dérivable en a et on note cette dérivée $f'(a)$ si la limite suivante existe :*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Exemple 17
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

- le taux de variation de f entre a et $a + h$ est :
  $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \dfrac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \dfrac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$.
- donc, $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} (2a + h) = 2a$.
- En particulier, $f'(3) = 6$, $f'(0) = 0$ ...

Interprétation graphique :
Lorsque h se rapproche de 0, le point M se rapproche du point A.
Ainsi, la droite (AM) se rapproche de la tangente $\mathcal{T}$ au point A
$f'(a)$ correspond au coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse a.



III.2 Fonction dérivée

Définition 9
Soit f une fonction dérivable en tout point x d'un intervalle I, alors la fonction qui à x associe $f'(x)$ est appelé fonction dérivée de f sur I.

On obtient le tableau de dérivation suivant :

Fonction f	Fonction f'	Ensemble de définition de f
k	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$

Exemple 18
Calcul de la dérivée des fonctions suivantes :

- $f(x) = \pi \quad f'(x) = 0$
- $f(x) = x^{\frac{2}{3}} \quad f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$
- $f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2$
- $f(x) = x^{2007} \quad f'(x) = 2007x^{2006}$

III.3 Dérivées successives

Définition 10
Soit f une fonction dérivable. Lorsque cela est possible, on définit les dérivées successives de f notées :

$$f' \quad , \quad f'' \quad , \quad f''' \quad , \quad \ldots \quad , \quad f^{(n)}.$$

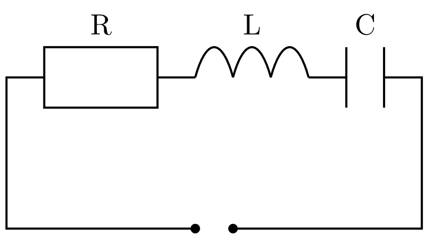
Exemple 19
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 3$.

- $f'(x) = 6x^2 - 2x + 1$.
- $f''(x) = 12x - 2$.
- $f'''(x) = 12$.
- $f^{(4)} = 0$.

En physique et en mécanique, on utilise la notation différenteielle : $\frac{df}{dx} = f'$ et $\frac{d^2 f}{dx^2} = f''$

Exemple 20
Dans un circuit R, L, C en série, on a :

- $i = \frac{dq}{dt}$.
- $e = -L\frac{di}{dt}$.
- donc : $e = -L\frac{d^2q}{dt^2}$.



III.4 Opérations

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I.

Opération	Fonction	Dérivée
Addition	$u+v$	$u'+v'$
Multiplication par un nombre	$k\times u$ avec $k\in\mathbb{R}$	$k\times u'$
Multiplication	$u\times v$	$u'\times v+u\times v'$
Puissance	u^n	$n\times u'\times u^{n-1}$
Division	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$
Inverse	$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
Fonction composée	$f\circ g$	$f'\circ g\times g'$
exponentielle	e^u	$u'\ e^u$
logarithme	$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$
sinus	$\sin(u)$	$u'\ \cos(u)$
cosinus	$\cos(u)$	$-u'\ \sin(u)$

Exemple 21
Calcul de dérivées :

- $f(x)=x^3+x+3$: On utilise la formule $(u+v)'=u'+v'$ avec $u(x)=x^3$ et $v(x)=x+3$.

  on obtient $f'(x)=3x^2+1$.

- $f(x)=3(x^2+4)$: on utilise la formule $(ku)'=ku'$ avec $k=3$ et $u(x)=x^2+4$.
  on obtient $f'(x)=6x$.

- $f(x)=(-2x+3)(5x-3)$: On utilise la formule $(uv)'=u'v+uv'$ avec $u(x)=-2x+3$ et $v(x)=5x-3$.
  on obtient $f'(x)=-20x+21$.
- $f(x)=(2x-7)^2$: on utilise la formule $(u^2)'=2uu'$ avec $u(x)=2x-7$.
  on obtient $f'(x)=4(2x-7)$.

- $f(x)=\dfrac{3x-4}{x^2+3}$: On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u(x)=3x-4$ et $v(x)=x^2+3$.
  on obtient $f'(x)=\dfrac{-3x^2+8x+9}{(x^2+3)^2}$.

- $f(x)=\dfrac{1}{-3x+1}$: On utilise la formule $\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$ avec $v(x)=-3x+1$.
  on obtient $f'(x)=\dfrac{3}{(-3x+1)^2}$.

- $f(x)=e^{3x+1}$: On utilise la formule $(e^u)'=u'\ e^u$ avec $u(x)=3x+1$.
  on obtient $f'(x)=3\ e^{3x+1}$.

- $f(x)=ln(-2x+5)$: On utilise la formule $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x)=-2x+5$.
  on obtient $f'(x)=\dfrac{-2}{-2x+5}$.

- $f(x)=\cos(2x+1)$: On utilise la formule $\cos'(u)=-u'\sin(u)$ avec $u(x)=2x+1$.
  on obtient $f'(x)=-2\sin(2x+1)$.

III.5 Équation de la tangente

Propriété 9
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et dérivable en $a \in I$.
La tangente $\mathcal{T}_a$ en a à la courbe C_f a pour équation :

$$\mathcal{T}_a : y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Exemple 22
Soit $f(x) = x^2 + 2$. Les équations des tangentes en 0 et en -1 sont :

- $f'(x) = 2x$
- $f'(0) = 0$ donc $T_0 : y = 0 \times (x-0) + f(0) = 2$.
- $f'(-1) = -2$ donc $T_{-1} : y = -2 \times (x+1) + f(-1) = -2x + 1$.

IV Étude des variations d'une fonction

IV.1 Lien entre dérivation et sens de variation d'une fonction

L'idée est qu'il y a un lien entre le signe du coefficient directeur de la tangente de la courbe $\mathcal{C}$ et le sens de variation de la fonction f.

Propriété 10
On suppose que f est dérivable sur I.

- f est croissante sur $I \iff f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.
- f est décroissante sur $I \iff f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$.
- f est constante sur $I \iff f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

Il est donc possible de déterminer les variations d'une fonction à partir du signe de sa dérivée.

Exemple 23
Étude d'une fonction polynôme :
Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminons son sens de variation :

- Pour tout réel x on a $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$.
- On détermine le signe de $x^2 - x - 2$ en cherchant ses racines et on trouve -1 et 2.
  $f'(x) = 6(x+1)(x-2)$ est positive sauf entre ses racines -1 et 2.
- On peut déterminer le signe de la dérivée et en déduire les variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f			6				$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-\infty$				-21		

- f est croissante sur $]-\infty\,;-1\,]$ et sur $[\,2\,;+\infty\,[$ et décroissante sur $[\,-1\,;\,2\,]$.

Exemple 24
Etude d'une fonction logarithme :

Soit $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminons son sens de variation :

- Pour tout réel $x > 0$ on a $g'(x) = 4x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{4x^2-1}{x} = \dfrac{(2x+1)(2x-1)}{x}$.
- On peut déterminer le signe de la dérivée grâce à un tableau de signes puis en déduire les variations de la fonction g :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$+$	$\vert$	$+$	
$2x-1$		$-$	0	$+$	
x		$+$	$\vert$	$+$	
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de g	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

- g est décroissante sur $\left]0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right[$ et croissante sur $\left]\dfrac{1}{2}\ ;+\infty\right[$.

Exemple 25
Etude d'une fonction exponentielle :

Soit $h(x) = (x+2)\ e^{-x}$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminons son sens de variation :

- Pour tout réel x on a $h'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2) \times (-e^{-x}) = (1 - x - 2)\ e^{-x} = (-x-1)\ e^{-x}$.
- On peut déterminer le signe de la dérivée grâce à un tableau de signes puis en déduire les variations de la fonction h :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-x-1$		$+$	$\vert$	$-$	
e^{-x}		$+$	$\vert$	$+$	
signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de h	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

- h est croissante sur $[-\infty\ ;-1\ ]$ et décroissante sur $[-1\ ;+\infty\ [$.

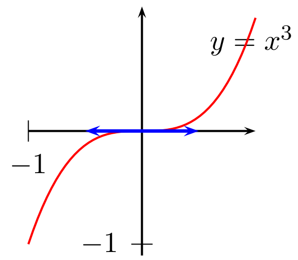
IV.2 Extremum d'une fonction

Propriété 11
f est une fonction dérivable sur l'intervalle I.
Si f admet un extremum (minimum ou maximum) en a distinct des extrémités de I, alors $f'(a) = 0$.

Remarque 4
Attention, la réciproque n'est pas vraie : le fait que $f'(a) = 0$ n'implique pas forcément qu'il existe un extremum en a.

Exemple 26

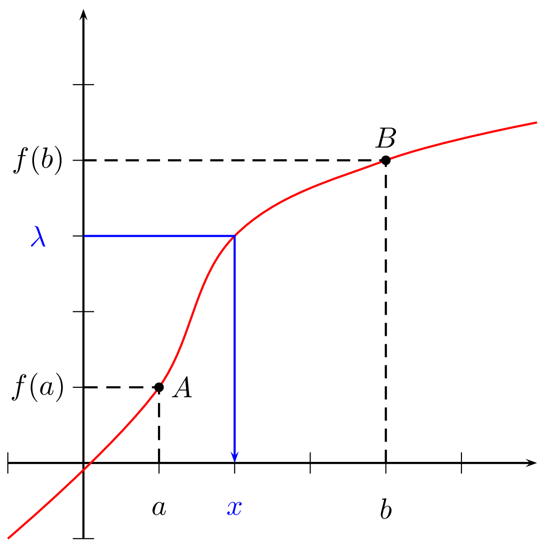
- La fonction $f(x) = x^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $f'(x) = 3x^2$ donc, $f'(0) = 0$ mais f n'admet ni minimum, ni maximum en 0.



Remarque 5
La tangente à la courbe en un point a où $f'(a) = 0$ est parallèle à l'axe des abscisses.

IV.3 Résolution de l'équation $f(x) = \lambda$

Propriété 12
Si f est une fonction continue, dérivable et strictement croissante [resp. décroissante] sur un intervalle $[a; b]$ alors, pour tout $\lambda \in [f(a); f(b)]$ [resp. $[f(b); f(a)]$], l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique sur l'intervalle $[a; b]$.



Exemple 27
Soit $f(x) = x^3 + x + 1 = 0$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Résolvons l'équation $f(x) = 0$ à 10^{-1} près.

- Pour tout réel x on a $f'(x) = 3x^2 + 1$.
- f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- on calcule $f(-1) = -1$ et $f(0) = 1$.
- D'après le théorème, $0 \in [f(-1); f(0)] = [-1; 1]$, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique dans l'intervalle $[-1; 1]$.
- A la calculatrice, on trouve $f(-0,7) = -0,043 < 0$ et $f(-0,6) = 0,184 > 0$.
- La racine vaut donc $-0,7$ à 10^{-1} près.