Développements limités

Table des matières

I Fonction exponentielle

On chercha à approximer la fonction $x \to \exp(x)$ par des fonctions successivement du premier, deuxième et troisième degré.
On pose $f(x) = e^x$, fonction dérivable autant de fois que l'on veut sur $\mathbb{R}$.

I.1 Développement limité d'ordre 1

Propriété 1
Au voisinage de 0, $\quad e^x = 1 + x + x\epsilon(x) \quad$ où $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

En effet, La définition du nombre dérivé de la fonction f en 0 nous donne :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + x\epsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0} x = 0$$

Or, on a : $\begin{cases} f(x) = e^x & \text{donc} \quad f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x & \text{donc} \quad f'(0) = 1 \end{cases}$ D'où le résultat trouvé dans la propriété.

I.2 Développement limité d'ordre 2

Propriété 2
Au voisinage de 0, $\quad e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \quad$ où $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

On peut démontrer cette propriété grâce, entre autre, à des intégrations successives :

- La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall t \in [-1\ ;\ 1\ ], \quad e^{-1} \leq e^t \leq e^1$$

- On intègre cette double inégalité de 0 à x pour $x \in [-1\ ;\ 1\ ]$:

$$\int_0^x \frac{1}{e}\ dt \leq \int_0^x e^t\ dt \leq \int_0^x e\ dt$$
$$\left[\frac{t}{e}\right]_0^x \leq [e^t]_0^x \leq [et]_0^x$$
$$\frac{x}{e} \leq e^x - 1 \leq ex$$

- On intègre à nouveau cette double inégalité de 0 à t pour $t \in [-1\ ;\ 1\ ]$:

$$\int_0^t \frac{x}{e}\ dx \leq \int_0^t (e^x - 1)\ dx \leq \int_0^t ex\ dx$$
$$\left[\frac{x^2}{2e}\right]_0^t \leq [e^x - x]_0^t \leq \left[\frac{ex^2}{2}\right]_0^t$$
$$\frac{t^2}{2e} \leq e^t - t - 1 \leq \frac{et^2}{2}$$

- On intègre une dernière fois cette double inégalité de 0 à x pour $x \in [-1\ ;\ 1\ ]$:

$$\int_0^x \frac{t^2}{2e}\,dt \leq \int_0^x (e^t - t - 1)\,dt \leq \int_0^x \frac{et^2}{2}\,dt$$

$$\left[\frac{t^3}{6e}\right]_0^x \leq \left[e^t - \frac{t^2}{2} - t\right]_0^x \leq \left[\frac{et^3}{6}\right]_0^x$$

$$\frac{x^3}{6e} \leq e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1 \leq \frac{ex^3}{6}$$

- Pour $x \neq 0$, on pose $\epsilon(x) = \dfrac{e^x - \left(\dfrac{x^2}{2} + x + 1\right)}{x^2}$. D'après l'inégalité précédente, x^2 étant positif, on obtient :

$$\frac{x}{6\,e} \leq \epsilon(t) \leq \frac{ex}{6}$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{6e} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ex}{6e} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

- D'où la conclusion :

$$\forall x \in [-1\ ;\ 0\ [\ \cup\ ]\ 0\ ;\ 1\ ], \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \text{ où } \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0.$$

I.3 Développement limité d'ordre 3

Propriété 3
Au voisinage de 0, $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$ où $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

- On intègre de nouveau la dernière inégalité trouvée précédemment de 0 à t pour $t \in [-1\ ;\ 1\ ]$:

$$\int_0^t \frac{x^3}{6e}\,dx \leq \int_0^t \left(e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1\right)dx \leq \int_0^t \frac{ex^3}{6}\,dx$$

$$\left[\frac{x^4}{24e}\right]_0^t \leq \left[e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x\right]_0^t \leq \left[\frac{ex^4}{24}\right]_0^t$$

$$\frac{t^4}{24e} \leq e^t - \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} - t - 1 \leq \frac{et^4}{24}$$

- Pour $t \neq 0$, on pose $\epsilon(t) = \dfrac{e^t - \left(\dfrac{t^3}{6} + \dfrac{t^2}{2} + t + 1\right)}{t^3}$. D'après l'inégalité précédente, on obtient :

$$\frac{t}{24e} \leq \epsilon(t) \leq \frac{et}{24} \quad \text{pour} \quad t > 0$$

$$\frac{et}{24} \leq \epsilon(t) \leq \frac{t}{24e} \quad \text{pour} \quad t < 0$$

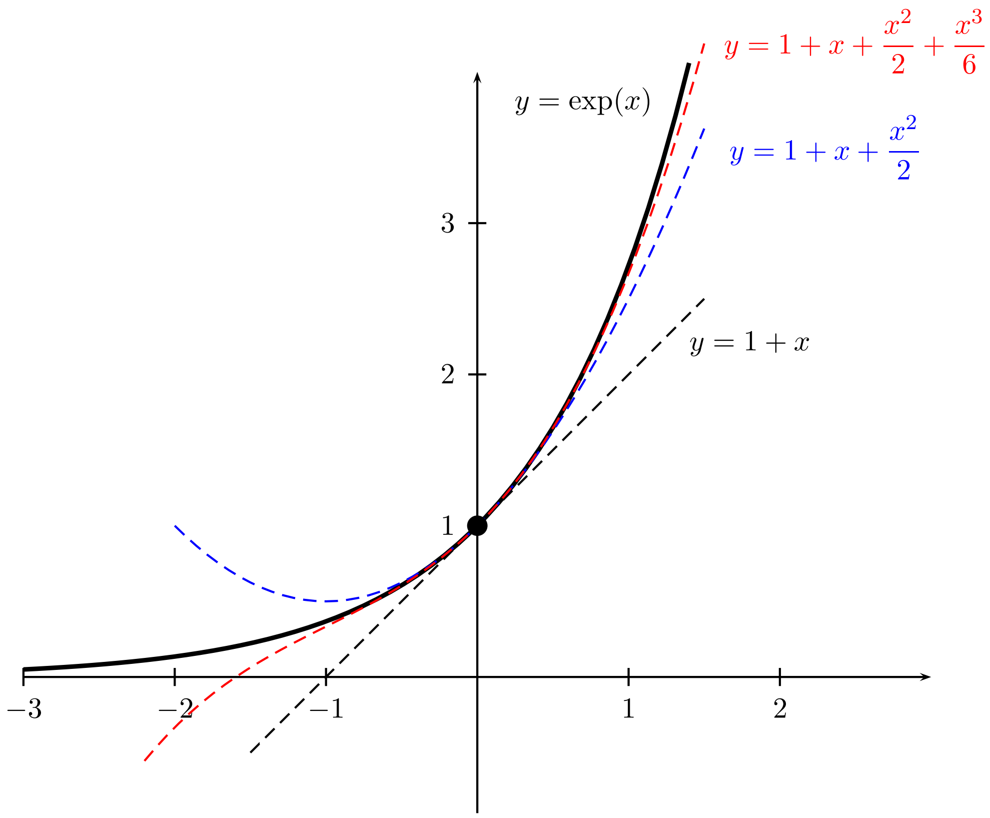
Or, $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{24e} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{et}{24} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{t\to 0} \epsilon(t) = 0$.

- D'où la conclusion :

$$\forall t \in [-1\ ;\ 0\ [\ \cup\ ]\ 0\ ;\ 1\ ], e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + t^2\epsilon(t) \text{ où } \lim_{t\to 0} \epsilon(t) = 0.$$

I.4 Interprétation graphique

Graphiquement, on obtient à différents ordres des approximations de la fonction exponentielle au voisinage de 0.
Plus l'ordre est élevée, meilleure est l'approximation !



II Dévéloppements limités

II.1 Généralités

Définition 1
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0.
On dit que f admet un <u>*développement limité à l'ordre n au voisinage de 0*</u> *s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $x \in I$:*

$$f(x) = P_n(x) + x^n \epsilon(x) \text{ où } \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0.$$

ou sous forme développée

$$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \epsilon(x).$$

On dit que $P_n(x)$ est la <u>*partie régulière*</u> *du développement limité et $x^n \epsilon(x)$ est le le* <u>*reste*</u>*.*

II.2 Dévéloppements limités usuels

Au voisinage de zéro, on a :

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$.
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x)$.
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)$.
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^n\epsilon(x)$.
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1!} + x^n\epsilon(x)$.
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$.

Remarque 1
La partie régulière du développement limité en 0 d'une fonction paire (respectivement impaire) est un polynôme constitué de monômes de degré pair (respectivement impair).

Dans le reste du chapitre, on considère les fonctiions f et g admettant à l'ordre n au point 0 des développements limités de parties régulières $P(x)$ et $Q(x)$.

II.3 Opérations algébriques

Propriété 4

- $f + g$ admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est $P(x) + Q(x)$.
- $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière $P(x) \times Q(x)$ en supprimant tous les termes de degré strictement supérieurs à n.

Exemple
Développement limité à l'ordre 3 de $\frac{e^x}{1+x}$:

- A l'ordre 3, on a $\begin{cases} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_1(x) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0}\epsilon_1(x) = 0 \\ \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\epsilon_2(x) \text{ avec } \lim\limits_{x\to 0}\epsilon_2(x) = 0 \end{cases}$
- donc $\frac{e^x}{1+x} = e^x \times \frac{1}{1+x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_1(x)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^3\epsilon_2(x)\right)$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + x - x^2 + x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\mapsto 0}\epsilon(x) = 0.$$

II.4 Composition

Propriété 5
Si $f(x) = P(x) + x^n\epsilon(x)$ alors :
- $f(ax) = P(ax) + x^n\epsilon_1(x)$ pour tout $a \in \mathbb{R}^*$.
- $f(x^p) = P(x^p) + x^{n\times p}\epsilon_2(x)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Exemple
Développement limité à l'ordre 7 de $\sin(2x)$:

- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + x^7\epsilon_1(x)$ donc :
$\sin(2x) = 2x - \dfrac{(2x)^3}{3!} + \dfrac{(2x)^5}{5!} - \dfrac{(2x)^7}{7!} + x^7\epsilon_2(x) = 2x - \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{4}{15}x^5 - \dfrac{8}{315}x^7 + x^7\epsilon_2(x)$.

Développement limité à l'ordre 6 de $\dfrac{1}{1+x^2}$:

- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\epsilon_1(x)$ donc :
$\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^6\epsilon_2(x)$.

II.5 Dérivation et intégration

Propriété 6
Si f est dérivable sur un intervalle I contenant 0, et admet un développement limité d'orde n en 0, alors f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ au voisinage de 0 de partie régulière $P'(x)$.

Exemple
Le développement limité à l'ordre 7 de $\sin(x)$ est : $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + x^7\epsilon(x)$.

- Par dérivation, on trouve $(\sin x)' = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + x^6\epsilon(x)$.
- On retrouve bien le développement limité à l'ordre 6 de $\cos(x)$.

Propriété 7
Soit F une primitive de f sur un intervalle I contenat 0,
Si $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$,
alors $F(x) = F(0) + a_0x + a_1\dfrac{x^2}{2} + a_2\dfrac{x^3}{3} + \cdots + a_n\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\epsilon(x)$.

Exemple
Le développement limité à l'ordre n de $\dfrac{1}{1+x}$ est :

- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots + (-1)^nx^n + x^n\epsilon(x)$.
- Si on intègre, on obtient
$\displaystyle\int \dfrac{1}{1+x}dx = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\epsilon(x)$
- On retouve ainsi le développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 de la fonction $\ln(1+x)$.