Devoir surveillé n°5

EXERCICE n° 1

Un joueur lance deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On suppose que les dés sont non-truqués et donc que pour chaque dé, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition.

Le joueur suit les règles suivantes :

– Si les deux dés donnent le même numéro, le joueur perd 10 points,
– Si les deux dés donnent deux numéros de parités différentes (l'un est pair et l'autre impair), il perd 5 points,
– Dans les autres cas, il gagne 15 points.

1. Le joueur joue une partie et on note X la variable aléatoire correspond au nombre de points obtenus.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X (on pourra s'aider d'un arbre ou d'un tableau).
   (b) Calculer l'espérance de X.
2. Le joueur effectue 10 parties de suites. Les résultats des parties sont indépendants les uns des autres. On appelle alors Y la variable aléatoire égale au nombre de fois que le joueur gagne 15 points.
   Dans cette question, les résultats seront données à 10^{-3} *près.*
   (a) Expliquez pourquoi Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{3}$.
   (b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne deux fois 15 points ?
   (c) Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une fois 15 points ?
   (d) En moyenne, combien de fois le joueur peut-il gagner 15 points ?
3. Le joueur joue n parties de suite.
   (a) Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une fois 15 points ?
   (b) A partir de quelle valeur de n sa probabilité de gagner au moins une fois 15 points est-elle strictement supérieure à $0,999$?

EXERCICE n° 2

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de défauts sur le verre d'une ampoule.

On admet que X obéit à la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

Calculer la probabilité des événements suivants :

1. Il n'y a aucun défaut sur l'ampoule.
2. Il y a plus de deux défauts sur l'ampoule.
3. Le nombre de défauts est compris entre deux et cinq (bornes comprises).

EXERCICE n° 3

(*Dans tout cet exercice, les résultats concernant la population seront arrondis au million*).

Le tableau suivant donne l'évolution de la population de l'Inde de 1951 à 1991.

année	1951	1961	1971	1981	1991
Rang x_i	1	2	3	4	5
Population y_i (en millions)	361	439	548	683	846
z_i					

On cherche à étudier l'évolution de la population y en fonction du rang x de l'année.

1. Représenter graphiquement le nuage de points $(x_i\ ;\ y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unités graphiques 2 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 100 millions sur l'axe des ordonnées.
2. Le modèle étudié dans cette question sera appelée « droite de Mayer ».
   (a) G_1 désigne le point moyen des trois premiers points du nuage et G_2 celui des deux derniers points. Déterminer les coordonnées de G_1 et de G_2.
   (b) Déterminer l'équation réduite de (G_1G_2) sous la forme $y = ax + b$.
   (c) Tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique précédent.
   (d) En utilisant cet ajustement, calculer la population de l'Inde que l'on pouvait prévoir pour 2001.
3. (a) À l'aide de la calculatrice, déterminer un ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire.
   (b) Tracer cette droite $\mathcal{D}$ sur le graphique précédent.
   (c) En utilisant cet ajustement, calculer la population de l'Inde que l'on pouvait prévoir pour 2001.
4. On cherche un autre ajustement et on se propose d'utiliser le changement de variable suivant : $z = \ln y$.
   (a) Recopier le tableau ci-dessus et compléter la dernière ligne.
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un ajustement affine de z en fonction de x par la méthode des moindres carrés (*les coefficients seront arrondis au millième*).
   (c) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire, comparer avec celui trouvé dans la question 3. et conclure.
   (d) En déduire qu'une approximation de la popu1ation y, exprimée en millions d'habitants, en fonction du rang x de l'année est donnée par : $y \approx 289\ e^{0,215x}$.
   (e) Représenter graphiquement cette fonction $\mathcal{C}$ sur le graphique précédent.
   (f) En utilisant cet ajustement, calculer la population que l'on pouvait prévoir pour 2001.
5. Les résultats obtenus en 2001 ont révélé que la population comptait 1027 millions d'habitants. Déterminer une estimation de la population en 2011 en choisissant le modèle qui semble le plus approprié. Justifier ce choix.

Correction du DS n°5

EXERCICE n° 1

1. (a) On peut regrouper les résultats dans un tableau :

	1	2	3	4	5	6
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
5	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(6,5)$
6	$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

D'où la loi de probabilité de X :

k	-10	-5	$+15$
$p(X=k)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{12}{36}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

(b) $E(X) = -10 \times \dfrac{1}{6} - 5 \times \dfrac{1}{2} + 15 \times \dfrac{1}{3}$. D'où $\boxed{E(X) = \dfrac{5}{6}}$

2. (a) Si le joueur effectue 10 parties de suite dont les résultats sont indépendants les uns des autres, et que pour chaque partie, la probabilité d'obtenir 15 points est constante et égale à $\dfrac{1}{3}$, on peut dire que la variable aléatoire Y suit un loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{3}$.

On note : $\boxed{Y \rightsquigarrow \mathcal{B}\left(10; \dfrac{1}{3}\right)}$

De plus, pour tout k entier entre 0 et 10, on a : $P(Y=k) = \begin{pmatrix} 10 \\ k \end{pmatrix} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^k \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10-k}$.

(b) $P(Y=2) = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^8 = 0,195$.

$\boxed{\text{La probabilité que le joueur gagne deux fois 15 points est de } 0,195}$

(c) $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^0 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10} = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10} = 0,983$.

$\boxed{\text{La probabilité que le joueur gagne au moins une fois 15 points est de } 0,983}$

(d) Le nombre de fois que le joueur peut espérer gagner 15 points en 10 parties est l'espérance de la variable aléatoire Y.

Or, on sait que pour une variable aléatoire de paramètres n et p, l'espérance vaut $E = n \times p$.
D'où $E(Y) = 10 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{10}{3}$.

$\boxed{\text{En moyenne, le jouеut obtiendra } 3,3 \text{ fois la valeur 15}}$

3. (a) Si le joueur joue n parties de suite alors la variable aléatoire Z égale au nombre de fois où il gagne 15 points suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{1}{3}$.

On a alors : $P(Z \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^0 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \boxed{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$

(b) On veut avoir $P(Z \geq 1) > 0,999$ soit $1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n > 0,999$

$\iff \left(\dfrac{2}{3}\right)^n < 0,001 \iff n \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) < \ln(0,001) \iff n > \dfrac{\ln(0,001)}{\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)}$

$\iff n > 17,04.$

$\boxed{\text{La probabilité de gagner au moins une fois 15 points est supérieure à } 0,999 \text{ pour 18 parties minimum}}$

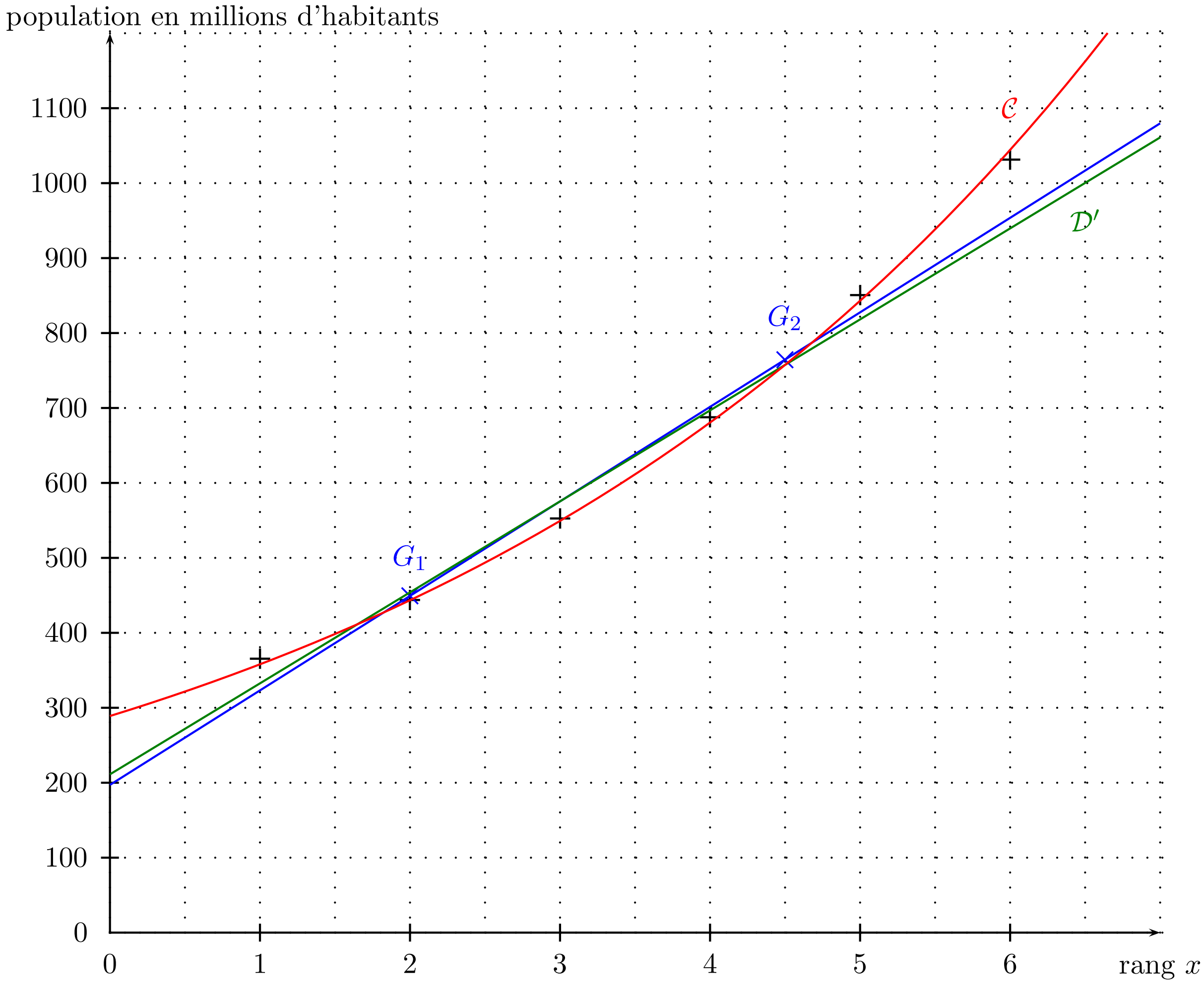
EXERCICE n° 2

$P(X = k) = e^{-5} \times \dfrac{5^k}{k!}$.

1. $P(X = 0) = e^{-5} \times \dfrac{5^0}{0!} = e^{-5} = \boxed{0,007}$
2. $P(X > 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = 1 - 0,007 - 0,034 - 0,084 = \boxed{0,875}$
3. $P(2 \leq X \leq 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 1) = \boxed{0,576}$

EXERCICE n° 3

1. Nuage de points :



2. (a) $G_1 : \begin{cases} x_{G_1} = \frac{1+2+3}{3} = 2 \\ y_{G_1} = \frac{361+439+548}{3} = 449,3 \end{cases}$ donc, $\boxed{G_1(\ 2\ ;\ 449,3\ )}$

   $G_2 : \begin{cases} x_{G_2} = \frac{4+5}{2} = 4,5 \\ y_{G_2} = \frac{683+846}{2} = 764,5 \end{cases}$ donc, $\boxed{G_2(\ 4,5\ ;\ 764,5\ )}$

   (b) La droite (G_1G_2) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle a donc pour équation $y = ax + b$ avec :

   $a = \dfrac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_2}} = \frac{764,5-449,3}{4,5-2} = 126,1.$

   De plus, elle passe par le point $G_1(2; 449,3)$ d'où :

   $y_{G_1} = ax_{G_1} + b \quad \Rightarrow \quad 449,3 = 126,1 \times 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = 197,1.$

   Conclusion : $\boxed{(G_1G_2) : y = 126,1x + 197,1}$.

   (c) Voir graphique.

   (d) 2001 correspond au rang $x = 6$ donc : $y = 126,1 \times 6 + 197,1 = 953,7.$

   $\boxed{\text{En 2001, on pouvait prévoir 954 millions d'habitants}}$

3. (a) La calculatrice donne $\mathcal{D} : y = ax + b$ avec $a = 121,4$, $b = 211,2$ et $r = 0,9908$.

   Donc $\boxed{\mathcal{D} : y = 121,4x + 211,2 \text{ avec } r = 0,9908}$

   (b) Voir graphique.

   (c) 2001 correspond au rang $x = 6$ donc : $y = 121,4 \times 6 + 211,2 = 939,6.$

   $\boxed{\text{En 2001, on pouvait prévoir 940 millions d'habitants}}$

4. (a) Tableau :

année	1951	1961	1971	1981	1991
Rang x_i	1	2	3	4	5
Population y_i (en millions)	361	439	548	683	846
z_i	$5,889$	$6,084$	$6,306$	$6,526$	$6,741$

   (b) La calculatrice donne $\mathcal{D}' : z = ax + b$ avec $a = 0,216$, $b = 5,665$.

   Donc $\boxed{\mathcal{D}' : z = 0,215x + 5,666}$

   (c) $r' = 0,9998$. r' est plus proche de 1 que r, donc, cette approximation doit être plus appropriée car les points seront plus près de la droite.

   (d) On a $\ln y = 0,215x + 5,666 \Longleftrightarrow y = e^{0,215x+5,666} \Longleftrightarrow y = (e^{0,215})^x \times e^{5,666}$

   Soit $\boxed{y \approx 289\ e^{0,215x}}$

   (e) Voir graphique.

   (f) 2001 correspond au rang $x = 6$ donc : $y = 289\ e^{0,215\times 6} = 1049,9.$

   $\boxed{\text{En 2001, on pouvait prévoir 1050 millions d'habitants suivant cet ajustement}}$

5. Le troisième ajustement semble le plus approprié car le plus proche des résultats réels.

   $\boxed{\text{Dans ce cas, on peut prévoir en 2011 une population de } y = 289\ e^{0,215\times 7} = 1302 \text{ habitants}}$