FONCTION LOGARITHME

I. DEFINITION DU LOGARITHME

a) Définition

Problème :
Soit a un réel strictement positif.
Démontrer que l'équation $e^x = a$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.
(théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $x \longrightarrow \exp(x)$)

Pour tout nombre réel a strictement positif, il existe un unique réel x tel que $e^x = a$
Par convention, on note ce nombre $\ln(a)$ que l'on appelle logarithme népérien de a.

Exemples :
- Le nombre x tel que $e^x = 3$ est ln 3.
- Le nombre x tel que $e^x = 5$ est ln 5 ainsi $e^{\ln 5} = 5$.

Conséquences :
- ln e = 1 et ln 1 = 0
- $x \longrightarrow \ln(x)$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$
- Pour tout nombre réel a strictement positif, $e^{\ln a} = a$.
  Pour tout nombre réel a, $\ln\left(e^a\right) = a$.

On dit que la fonction logarithme est la fonction réciproque de la fonction exponentielle, c'est à dire :
- $y = \ln(x) \Leftrightarrow e^y = x$
- Les deux courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice ($y = x$)

b) Propriétés

Si a et b sont deux réels strictement positifs alors ln(a.b) = ln(a) + ln(b)

Démonstration :
$e^{\ln(ab)} = ab = e^{\ln(a)}e^{\ln(b)} = e^{\ln(a)+\ln(b)}$
la fonction exponentielle étant strictement croissante :
$\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$

Remarque :

Cette propriété se généralise au cas d'un produit de trois, quatre, … facteurs,
$\ln(a_1.a_2.\ \ldots\ .a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \ldots + \ln(a_n)$

Elle sert dans les deux sens. Par exemple :
$\ln(6) = \ln(3\times2) = \ln(3) + \ln(2)$
Elle peut servir à simplifier certaines expressions.
$\ln(x + 1) + \ln(2x + 1) = \ln((x + 1).(2.x + 1)) = \ln(2x^2 + 3x + 1)$

Si a et b sont deux réels strictement positifs et n est un entier alors :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(a^n) = n \times \ln(a) \qquad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

En résumé, le logarithme népérien a la particularité de transformer les produits en sommes, les quotients en différences et les puissances en multiplications.

Démonstrations :

- On a : $a \times \frac{1}{a} = 1$. Donc : $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(1)$

$$\ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$$

- On peut écrire :
$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a\times\frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

- Soit n un entier positif. $\left(\text{lorsque n est négatif, a est remplacé par } \frac{1}{a}\right)$
$\ln(a^n) = \ln(a\times a\times \ldots \times a) = \ln(a) + \ln(a) + \ldots + \ln(a) = n \times \ln(a)$

- Lorsque a est un réel strictement positif, on a $\sqrt{a}\times\sqrt{a} = a$. Ainsi :

$$\ln\left(\sqrt{a}\times\sqrt{a}\right) = \ln(a)$$

$$2.\ln\left(\sqrt{a}\right) = \ln(a)$$

$$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}.\ln(a)$$

Exemples:

Simplifier chacune des expressions suivantes :

$A = \ln(24)$ 　 **$B = \ln\left(\sqrt{72}\right)$**

$C = \ln(x + 3) - \ln(2x + 1)$ 　 **$D = \ln(8) + \ln(10) + \ln\left(\frac{1}{40}\right)$**

$E = \ln(3x) - \ln(3)$ 　 **$F = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(\frac{8}{3}\right) - \ln(2^3)$**

$G = \ln(7^{-3}) + 2\ln(49)$ 　 **$H = 4\ln(25) - 2\ln\sqrt{5}$**

II. ETUDE DE LA FONCTION LOGARITHME

a) Variations

La fonction logarithme est dérivable sur] 0 ; + ∞ [

Sa dérivée est : $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$

Démonstration :

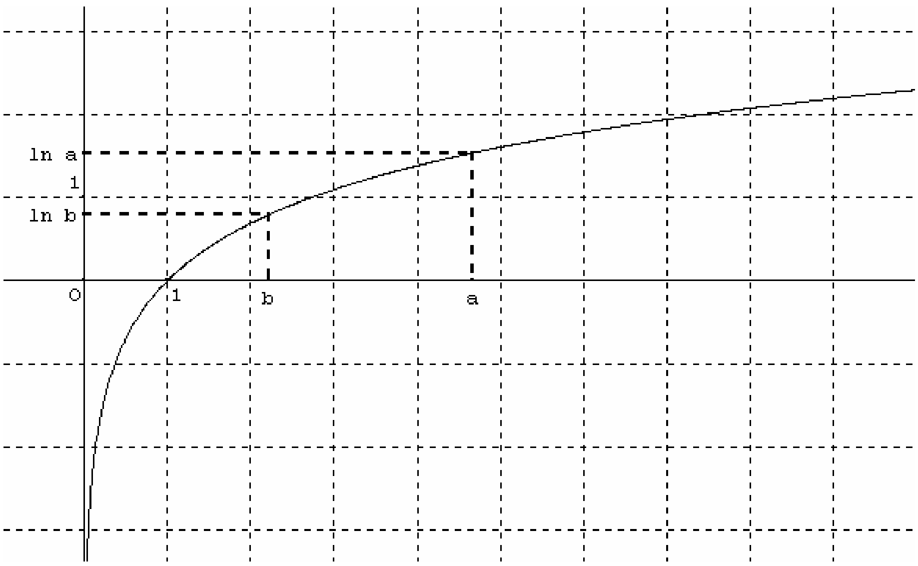
$(e^{\ln(x)})' = (x)' \Leftrightarrow (\ln(x))' \times e^{\ln(x)} = 1 \Leftrightarrow (\ln(x))' \times x = 1 \Leftrightarrow (\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$

Sachant que la dérivée de la fonction logarithme est $\dfrac{1}{x}$ et qu'elle est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, la dérivée est positive, et la fonction est donc croissante sur cet intervalle.

D'où le tableau de variations suivant :

x	0	+∞
f'(x)	+	
f(x)	-∞ ↗	+∞

et la courbe suivante :



Pour tous réels a et b strictement positifs,

- $\ln a > \ln b$ équivaut à $a > b$
- $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$

<u>conséquences :</u>
Pour tout réel x strictement positif :
- $\ln x = 0$ équivaut à $x = 1$
- $\ln x < 0$ équivaut à $0 < x < 1$
- $\ln x > 0$ équivaut à $x > 1$

b) Limites

Les limites suivantes sont à connaître :
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

<u>Conséquence :</u>
L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentant ln.

<u>Exemples :</u>
Etudier la limite en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes.
a) Pour tout réel $x > 3$, $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 1)$.
b) Pour tous réels $x > -\frac{1}{2}$, $g(x) = \ln(x + 3) - \ln(2x + 1)$.

Examinons la limite en $+\infty$: on obtient une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».
Pour déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$, nous allons devoir en modifier l'écriture.
$f(x) = \ln(x + 3) - \ln(2x + 1) = \ln\left(\frac{x+3}{2x+1}\right)$
Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{2x+1}\right) = \frac{1}{2}$ (mise en facteur de x)
donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$

c) Fonction ln(u)

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors :
Ln (u) est dérivable sur l'intervalle I et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

<u>Exemples :</u>
- **f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.**

Le polynôme u définie par $u(x) = x^2 + 1$ est strictement positif et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

- **La fonction $g : x \alpha \ln(2x - 1)$ est définie pour $2x - 1 > 0$, c'est à dire pour $x > \frac{1}{2}$.**

Alors g est dérivable sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$, et pour tout $x \in]\frac{1}{2} ; +\infty[$, $g'(x) = \frac{2}{2x - 1}$

III. Equations et inequations

Méthode :

Pour résoudre une équation du type $\ln u(x) = \ln v(x)$ (respectivement une inéquation du type $\ln u(x) \geq \ln v(x)$) :

– on détermine l'ensemble des réels x tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$ (dans ce cas l'équation est bien définie) ;

– on résout dans cet ensemble l'équation $u(x) = v(x)$ (respectivement l'inéquation $u(x) \geq v(x)$).

Exemples :

- **Résoudre l'équation : $\ln(2x - 4) = 0$**

– Il faut tout d'abord $2x - 4 > 0$, c'est à dire $x > 2$

– Puis on résout $\ln(2x - 4) = 0$ équivalant à $2x - 4 = 1$, c'est à dire $x = \frac{5}{2}$

- **Résoudre l'inéquation : $\ln(x - 10) < 0$**

$\ln(x - 10) < 0$ équivaut à $0 < x - 10 < 1$, c'est à dire : $10 < x < 11$.
L'ensemble des solutions est alors : $] 10 ; 11 [$.

- **Résoudre l'équation : $\ln(x^2 - 4) = \ln(3x)$.**

– on cherche les nombres x tels que $x^2 - 4 > 0$ et $3x > 0$.

Or $x^2 - 4 > 0$ lorsque $x \in] -\infty ; -2 [\cup] 2 ; +\infty [$ et $3x > 0$ lorsque $x > 0$.
L'équation sera alors résolue dans l'ensemble $I =] 2 ; +\infty [$.
– de plus $x^2 - 4 = 3x$ signifie $x^2 - 3x - 4 = 0$.
On trouve $\Delta = 25$ et les solutions sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$.
Or, $4 \in I$ et $-1 \notin I$,
donc la seule solution de l'équation $\ln(x^2 - 4) = \ln(3x)$ est 4.

- **Résoudre l'inéquation : $\ln(2x + 4) \geq \ln(6 - 2x)$.**

On cherche les réels x tels que $2x + 4 > 0$ et $6 - 2x > 0$, c'est à dire tels que $x > -2$ et $x < 3$.
L'inéquation doit alors être résolue dans l'ensemble : $I =] -2 ; 3 [$.
De plus, $2x + 4 \geq 6 - 2x$ équivaut à $x \geq \frac{1}{2}$.
L'ensemble des solutions est alors : $] -2 ; 3 [\cap [\frac{1}{2} ; +\infty [$, c'est à dire $[\frac{1}{2} ; 3 [$

- **Résoudre l'équation : $(\ln x)^2 - 3 \ln x - 4 = 0$ avec $x > 0$**

  On pose $X = \ln x$ et on obtient l'équation : $X^2 - 3X - 4 = 0$
  $\Delta = 25$. Les solutions sont alors : $X_1 = -1$ et $X_2 = 4$
  On résout alors les équations : $\ln x = -1$ et on obtient : $x = e^{-1}$
  $\ln x = 4$ et on obtient : $x = e^4$
  Les deux solutions de l'équation sont alors e^{-1} et e^4.

IV. LOGARITHME DECIMAL

La fonction logarithme décimal, notée log, est la fonction définie sur $] 0 ; +\infty [$ par :

$$\log (x) = \frac{\ln (x)}{\ln (10)}.$$

Ainsi $\log(1) = 0$, $\log(10) = 1$.
Pour tout entier n, $\log(10^n) = n$.