

Chapitre 3

Calcul matriciel

1. Définitions et Vocabulaire

a. Définitions d'une matrice

Définition

Une matrice de dimension $n \times p$ est un tableau de nombres comportant n lignes et p colonnes

Exemples

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

Cette matrice a pour dimension 3×4
Elle comporte 3 lignes et 4 colonnes
C'est une matrice **quelconque**

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -5 & 7 \\ 4 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Cette matrice a pour dimension 4×4
Elle comporte 4 lignes et 4 colonnes
C'est une matrice **carrée**

$$[7 \quad 13 \quad 11 \quad 5 \quad 3]$$

Cette matrice a pour dimension 1×5
Elle comporte 1 lignes et 5 colonnes
C'est un **vecteur ligne**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Cette matrice a pour dimension 5×1
Elle comporte 5 lignes et 1 colonnes
C'est un **vecteur colonne**

b. Vocabulaire

- Les nombres dans les matrices se nomment : les **coefficients** de la matrice
- On note a_{ij} le coefficient à l'intersection de la ligne i et la colonne j .

- Toute matrice est de la forme :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{np} \end{bmatrix}$$

- Une matrice **carrée** est une matrice avec le même nombre de lignes et de colonnes
On a alors $n = p$.
- Un **vecteur colonne** est une matrice avec une seule colonne
- Un **vecteur ligne** est une matrice à une seule ligne
- Deux matrices sont **égales** si elles ont la même dimension et les coefficients situés à la même place sont égaux.

c. Transposée d'une matrice

Définition

La transposée d'une matrice est obtenu en échangeant les lignes et les colonnes

Si A est une matrice alors sa transposée se note : tA

Les lignes de A sont les colonnes de tA

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{np} \end{bmatrix} \text{ alors } {}^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{n3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1p} & a_{2p} & a_{3p} & \dots & a_{np} \end{bmatrix}$$

Exemples

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$${}^t A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & 10 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -5 & 7 \\ 4 & 7 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$${}^t B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 0 \\ -5 & 8 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = [4 \quad 10 \quad 3 \quad 4]$$

$${}^t C = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$${}^t D = [5 \quad 2 \quad 1 \quad 6]$$

2. Additions et Soustractions

a. Les additions et soustractions de matrices

Règle de calcul

La somme (ou la différence) de deux matrices A et B de même dimension est la matrice obtenue en ajoutant (ou soustrayant) les coefficients de A et B situés à la même place.

Exemple

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 10 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \text{ alors } A+B = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 12 & 14 \\ 3 & 4 & 10 & 6 \\ 5 & 6 & 11 & 11 \end{bmatrix}$$

Remarque :

$A+B$ a la même dimension que A et B .

b. Multiplication par un réel

Règle de calcul

Le produit d'une matrice par un réel λ , est la matrice $\lambda \times A$ obtenue en multipliant chaque coefficient de A par λ .

Exemples

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 10 & 2 \end{bmatrix} \text{ alors } 10A = \begin{bmatrix} 30 & 70 & 80 & 70 \\ 20 & 10 & 40 & 50 \\ 50 & 60 & 100 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & \frac{8}{3} & \frac{7}{3} \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ \frac{5}{3} & \frac{6}{3} & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ alors } 3A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 10 & 2 \end{bmatrix} \text{ alors } \frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{8}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{1}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \frac{10}{2} & \frac{2}{2} \end{bmatrix}$$

3. Multiplications

a. Produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne

Règle de calcul

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + \dots + a_{n-1} \times b_{n-1} + a_n \times b_n$$

Exemple

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \times 3 + 4 \times 1 + 2 \times 5 + 0 \times 4 + 1 \times 0 = 17$$

b. Produit d'une matrice par un vecteur colonne

Règle de calcul

Pour multiplier une matrice A ($n \times p$) par un vecteur colonne B ($p \times 1$), on multiplie chacune des n lignes de la matrice A par le vecteur colonne B .
On obtient alors un vecteur colonne.

Exemples

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ alors } A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 5 + 4 \times 7 \\ 3 \times 5 + 2 \times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 29 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ alors}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 4 \times 0 + 1 \times 0 \\ 3 \times 1 + 2 \times 0 + 2 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ alors}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 0 + 4 \times 1 + 1 \times 0 \\ 3 \times 0 + 2 \times 1 + 2 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ alors}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 0 + 4 \times 0 + 1 \times 1 \\ 3 \times 0 + 2 \times 0 + 2 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ alors}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 4y + 1z \\ 3x + 2y + 2z \end{bmatrix}$$

d. Produit de deux matrices

Règle de calcul

Si $A (a_{ij})$ est une matrice de dimension $n \times p$ et $B (b_{ij})$ est une matrice de dimension $p \times m$ alors $C = A \times B (c_{ij})$ est une matrice de dimension $n \times m$ et c_{ij} est le produit de la i -ème ligne de A par la j -ème colonne de B .

Exemple

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ alors } A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 \times 0 + 4 \times 0 + 1 \times 1 & 2 \times 1 + 4 \times 1 + 1 \times 5 & 2 \times 4 + 4 \times 7 + 1 \times 6 \\ 3 \times 0 + 2 \times 0 + 2 \times 1 & 3 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 5 & 3 \times 4 + 2 \times 7 + 2 \times 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 42 \\ 2 & 15 & 38 \end{bmatrix}$$

e. Propriétés de la multiplication

La multiplication **n'est pas commutative** :
 $A \times B \neq B \times A$

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

La multiplication est **distributive** par rapport à l'addition :
 $A \times (B + C) = A \times B + B \times C$

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

La multiplication est **associative**
 $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Matrice unité et Inverse

a. Définition

Définition

I_n est une matrice unité si $\forall i \in \mathbb{N}, a_{ii} = 1$ et $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

Tous les coefficients de la diagonale sont égaux à 1 et les autres sont tous nuls

Exemple

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Définition

Soit A une matrice carrée $n \times n$.

La matrice A^{-1} est l'inverse de A ssi $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$

Exemple

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ alors } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

En effet : $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_2$

b. Recherche de l'inverse d'une matrice**Règle de calcul**

Pour déterminer l'inverse d'une matrice M carrée d'ordre n , on recherche une matrice N dont les coefficients sont des inconnues telle que $M \times N = I_n$

Exemple

$$\text{Soit } M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ On cherche une matrice } N \text{ telle que } MN = I_2$$

$$\text{On pose } N = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\text{On a alors } M = \begin{bmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ 2a-c & 2b-d \end{bmatrix}$$

$$\text{Ainsi, } MN = I \text{ équivalent à } \begin{bmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ 2a-c & 2b-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ou encore : } 3a + 2c = 1$$

$$3b + 2d = 0$$

$$2a - c = 0$$

$$2b - d = 1$$

On trouve $a = 1/7$, $b = 2/7$, $c = 2/7$ et $d = -3/7$

$$\text{On en déduit que la matrice } M \text{ est inversible et } M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Remarque :

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2

A est inversible si, et seulement si $a d - b c \neq 0$

Si A est inversible, on démontre facilement que $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

5. Résolution de systèmes d'équations

Exemple

Je souhaite résoudre $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 5y = -7 \end{cases}$

$$\text{or, } \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 3y \\ 3x + 5y \end{bmatrix}$$

ce système est équivalent à l'équation suivante : $AX = B$

$$\text{avec } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\text{or } AX = B \Leftrightarrow A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B$$

$$\text{donc } A \times X = B \Leftrightarrow I_2 * X = A^{-1} \times B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B$$

Il reste donc à calculer A^{-1} et de calculer $A^{-1} \times B$
pour obtenir x et y. Attention A^{-1} est à gauche dans $A^{-1} \times B$

$$\text{On trouve } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{19} & \frac{3}{19} \\ -\frac{3}{19} & \frac{2}{19} \end{bmatrix}$$

$$\text{donc } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{19} & \frac{3}{19} \\ -\frac{3}{19} & \frac{2}{19} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{19} \times 8 - \frac{3}{19} \times 7 \\ -\frac{3}{19} \times 8 - \frac{2}{19} \times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{19} \\ \frac{-38}{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ et } y = -2$$

6. Autres calculs

a. Puissances de matrices

Pour calculer A^n on effectue $A \times A \times A \dots \times A$ (n fois)

Exemple

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{montrer que } J^3 = 0$$

b. Image d'une matrice par une fonction polynôme

On note la fonction $f(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 5)$

Soit A une matrice carrée $n \times n$

Pour calculer $f(A)$ on effectue $(A - 2I_n)(A - 3I_n)(A - 5I_n)$

Exemple

$$\text{Si } J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{montrer que } f(J) = 0$$