TRIGONOMETRIE

I. LE RADIAN

Définition : On appelle ***radian*** (rad) l'angle au centre qui intercepte, sur un cercle de rayon R, un arc de longueur R

Il en découle que nous pourrons effectuer les conversions de mesure à l'aide d'un tableau de proportionnalité :

Angle	plat	plein	droit	fig. a	fig. b	fig. b
Mesure en degré	180	360	90	45	60	30
Mesure en radian	π	2π	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$

Figure a : triangle rectangle isocèle

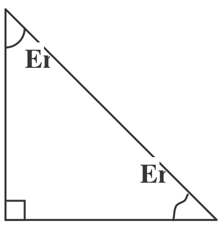
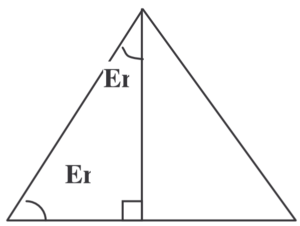


Figure b : triangle équilatéral



Il est indispensable de se familiariser avec les valeurs précédentes ainsi qu'avec les figures où elle sont omniprésentes. Dans le cas général, on utilisera le tableau de proportionnalité ci-dessous de préférence à une formule toute faite :

Degrés	180	x
radians	π	α

Propriété : Un arc de cercle de rayon R et d'angle au centre α (en radian) a pour longueur :

$$l = \alpha R$$

II. ORIENTATION

Il existe deux sens de parcours sur un cercle du plan.

Définition : ***Orienter un cercle***, c'est choisir sur ce cercle un sens que l'on nomme sens direct, l'autre sens est nommé sens indirect.
Par convention, le sens contraire des aiguilles d'une montre est choisi comme ***sens direct***.

Remarque : Plusieurs noms peuvent être donnés au sens direct : sens positif, sens trigonométrique.
De même, le sens indirect peut s'appeler : sens négatif, sens horaire.

Définition : Un ***cercle trigonométrique*** est un cercle de rayon 1 orienté dans le sens direct

III. MESURES D'ARCS ET D'ANGLES ORIENTES

(C) est un cercle trigonométrique, A et M deux points de (C).

Définition : Une mesure, en radians, de l'arc orienté $\overset{\frown}{AM}$ du cercle trigonométrique est la longueur de chemin parcouru par un mobile, parti de A et allant en M, dans le sens direct

Propriété : Si α est une mesure en radians de l'arc orienté $\overset{\frown}{AM}$, alors toutes les mesures en radians de cet arc sont de la forme $\alpha+k(2\pi)$, où k est un nombre entier relatif.

Remarque : Dès que l'on connaît une mesure d'un l'arc orienté AM, on en connaît toutes les mesures.

Deux mesures successives d'un arc diffèrent de 2π, mais une seule de ces mesures appartient à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$: c'est la mesure principale .

Définition : On appelle **mesure principale**, en radians, d'un l'arc orienté , son unique mesure appartenant à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

Remarque : Le mobile peut ne pas s'arrêter à son premier passage.

Soient A et B deux points d'un cercle trigonométrique de centre O ; $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs unitaires de représentants respectivement $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

Définition : ♦ On appelle ***angle orienté de vecteurs unitaires*** $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de ces vecteurs.
♦ Une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une mesure en radians de l'arc orienté $\overset{\frown}{AM}$.

IV. REPERAGE SUR LE CERCLE TRIGONOMETRIQUE

(C) est le cercle trigonométrique de centre O, et I un point de (C) que l'on prendra comme origine.

Principes : ♦ Soit α un réel quelconque.

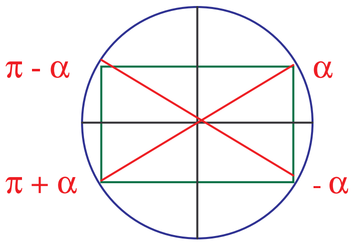
Il existe un unique point M de (C) tel que α soit une mesure de $\widehat{(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})}$.
Ce point est appelé le point de (C) associé à α.

♦ Réciproquement, tout point M de (C) est associé à n'importe laquelle des mesures de l'angle orienté de $\widehat{(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})}$.

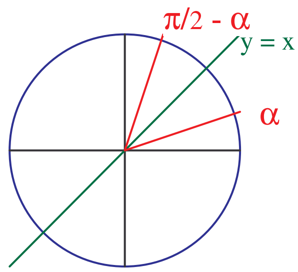
Remarque : Un point de (C) est donc repéré par plusieurs nombres réels.

Configurations de base :

Configuration du rectangle



Configuration des angles complémentaires

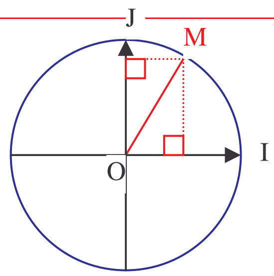


Notation : Généralement, on désigne directement le point de (C) associé à x en écrivant la lettre α sur le cercle (C).

V. TRIGONOMETRIE

Définition :
Soit α un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique (C) associé à α.

On appelle ***cosinus*** et ***sinus*** de α, et on note ***cos***(α) et ***sin***(α) les coordonnées de M dans le repère orthonormal (O ; I ; J).



A la lecture directe sur le cercle, on peut montrer les propriétés suivantes :

Propriété : Pour tout réel α et pour tout entier relatif k, on a :
♦ $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$
♦ $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$
♦ $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha)$

Grâce aux propriétés des triangles, on peut alors donner certaines valeurs exactes du sinus et du cosinus :

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Une lecture efficace du cercle trigonométrique suivant la configuration du rectangle permet de savoir ressortir les propriétés suivantes :

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ $\qquad$ $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$ $\qquad$ $\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$ $\qquad$ $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$

Le même travail sur la configuration des angles complémentaires donne :

$\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$ $\qquad$ $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha)$

VI. FONCTIONS SINUS ET COSINUS

Définition : Soit f une fonction définie sur R et T un nombre réel non nul, alors f est ***périodique*** de ***période T*** ssi :

Pour tout réel x, $f(x + T) = f(x)$

Etant donnés les résultats obtenus au V., on en déduit les propriétés suivantes :

Propriétés :
- ♦ Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π.
- ♦ La fonction cosinus est paire, la fonction sinus est impaire.

Remarque : Pour étudier les fonctions sinus et cosinus, il suffit donc de les étudier sur l'intervalle $[0, \pi[$, puis de compléter par parité et périodicité.

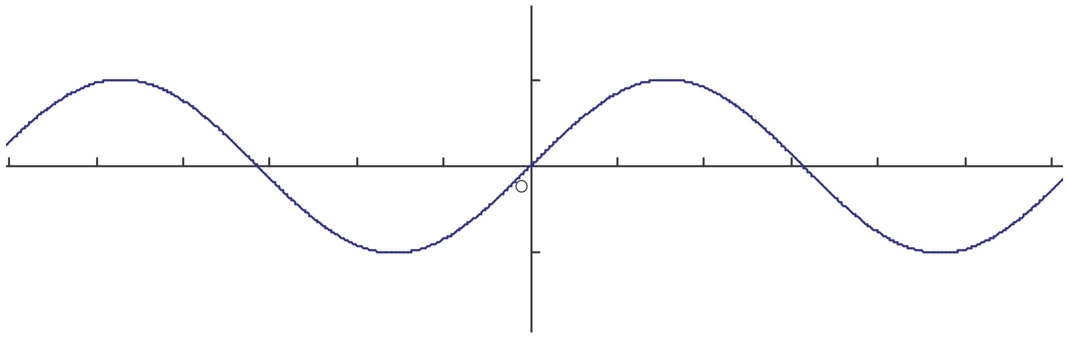
Le sens de variation des fonctions sinus et cosinus sur $[0, \pi[$ se déduit simplement de leur définition sur le cercle trigonométrique.

On obtient alors les tableaux de variation suivants :

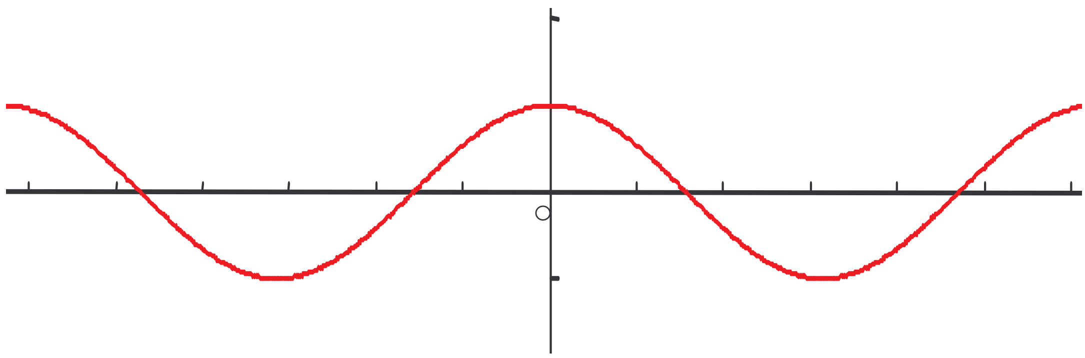
x	0		$\pi/2$		π
$\sin(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

x	0		$\pi/2$		π
$\cos(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Par symétrie et translation, on obtient les deux courbes :



La courbe représentative de la fonction sinus s’appelle une ***sinusoïde***



La courbe représentative de la fonction cosinus s’appelle aussi une ***sinusoïde***

VII. FONCTION TANGENTE

Définition : Soit x un réel tel que son cosinus soit non nul, on appelle ***tangente*** de x le réel noté ***tan (x)*** défini par : $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.