1 Fonctions usuelles

Fonctions à connaître

affine : $x \mapsto ax+b$

carré : $x \mapsto x^2$

cube : $x \mapsto x^3$

inverse : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

racine carrée : $x \mapsto \sqrt{x}$

Application.
Dans un même repère orthonormé, tracer les fonctions suivantes : $a(x) = 2x-3$,
$f(x) = x^2, \quad c(x) = x^3, \quad i(x) = \dfrac{1}{x}, \quad r(x) = \sqrt{x}$.

2 Équations du second degré

Équation : $ax^2+bx+c=0$ avec $a \neq 0$
Discriminant : $\Delta = b^2-4ac$

- $\Delta > 0 \Longrightarrow x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
  $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- $\Delta = 0 \Longrightarrow x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ et $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$
- $\Delta < 0 \Longrightarrow$ pas de solution dans $\mathbb{R}$

Application.
On considère les trois équations suivantes :
- $(E) : -3x^2+4x+4 = 0$;
- $(F) : 2x^2+x+5 = 0$;
- $(G) : 4x^2-20x+25$.

Pour chacune de ces équations :
1. Résoudre l'équation.
2. Factoriser l'équation.
3. Dresser son tableau de signes.

3 Dérivation

f est dérivable en a si $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe

$f(x)$	$f'(x)$
$u+v$	$u'+v'$
$k \times u$	$k \times u'$
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
$ax+b$	a
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$

- f croissante $\Longleftrightarrow f'(x) \geqslant 0$
- f décroissante $\Longleftrightarrow f'(x) \leqslant 0$
- f constante $\Longleftrightarrow f'(x) = 0$

Application.
1. Démontrer la formule de la dérivée de x^2.
2. Déterminer la dérivée de x^2; x^3; x^4; x^{2015}, $x^3+2x^2-5x+\pi$; $10(-4x+1)$ $(2x+3)(1-x)$ et $\dfrac{x-5}{2x+7}$.
3. Le bénéfice obtenu pour la vente de q objets est défini par $B(q) = -0,2q^2+58q-1200$.
   Combien faut-il vendre d'objets pour avoir un bénéfice maximal ?

4 Pourcentages

Taux d'évolution : $\dfrac{v_{finale} - v_{départ}}{v_{départ}}$

Coefficient multiplicateur : $1 \pm \dfrac{t}{100}$

Évolutions successives : $\left(1+\dfrac{t_1}{100}\right)\left(1+\dfrac{t_2}{100}\right)$

Application.
1. Un article passe de 150 € à 180 €. Quel est son taux d'évolution ?
2. Un loyer de 600 € augment de $1,5\,\%$. Quel est le montant après augmentation ?
3. Une production baisse de $10\,\%$ pour atteindre 5 tonnes. Quelle était la production avant ?
4. Un article est soldé a 20%, puis on lui applique une démarque supplémentaire de 30%. De quel pourcentage le prix a-t-il globalement baissé ?

5 Suites

Suite explicite : $u_n = f(n)$

Suite récurrente : $u_{n+1} = f(u_n)$

Suite croissante : $u_{n+1} > u_n$ ou $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

Suite décroissante : $u_{n+1} < u_n$ ou $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

Suite arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r$ et $u_n = u_0 + n \times r$

Suite géométrique : $u_{n+1} = q \times u_n$ et $u_n = u_0 \times q^n$

Application.
Antoine place 10 000 € au 1er janvier 2015 pendant 5 ans. Son banquier lui propose deux placements :

- A : taux mensuel de $0,15\,\%$ à intérêts simples ;
- B : taux annuel de $1,75\,\%$ à intérêts composés.

Soit a_n [b_n] le capital acquis au bout de n mois [années] avec le placement A [B]. Pour chacun des placements :

1. Déterminer une relation de récurrence.
2. Déterminer une relation explicite.
3. Calculer le capital au bout de 5 ans.

6 Statistique

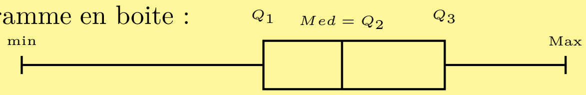
Variance : $V = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{m})^2$

Écart type : $\sigma = \sqrt{V}$

Médiane : valeur qui partage une liste ordonnée en deux listes de même effectif

Quartiles : valeurs Q_1, Q_2, Q_3 qui partagent une liste ordonnée en quatre listes de même effectif

Diagramme en boite :



Application.
On donne dans le tableau suivant le relevé des âges des enfants d'un centre aéré :

âge	5	6	7	8	9	10	11	12	13
effectif	2	3	2	4	2	1	3	1	1

1. Déterminer la moyenne, la variance et l'écart-type de la série.
2. Construire le diagramme en boite de la série.

7 Probabilités

Équiprobabilité : $P = \dfrac{\text{nombre d'issues réalisées}}{\text{nombre d'issues possibles}}$

Loi de proba de X : ensemble des probabilités des issues

Espérance : $E(X) = x_1P(X = x_1) + \cdots + x_nP(X = x_n)$

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$: expérience à deux issues

$P(succès) = p$ et $P(échec) = 1 - p$

La variable X associée au nombre de succès dans la répétition de manière indépendante de n épreuves de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ suit une loi binomiale $B(n,p)$ d'espérance $n \times p$

$P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Application.
Un menuisier propose un escalier composé de 14 marches présentant un défaut dans $4\,\%$ des cas. Elles sont choisies indépendamment dans un stock important. Le prix varie suivant le nombre de défauts :

- Aucun ou un : 2 300 €.
- De deux à quatre : 1 150 €.
- Cinq ou plus : 1 000 €.

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de marches ayant un défaut dans un tel escalier.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
2. Calculer la probabilité que l'escalier soit vendu au prix de 2 300 €.

8 Échantillonnage

Intervalle de fluctuation au seuil de $95\,\%$ de la fréquence d'une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(n,p)$: $\left[\dfrac{a}{n}, \dfrac{b}{n}\right]$ où

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geq 0,975$

Application.
Le directeur d'une marque pense que $90\,\%$ des consommateurs sont satisfaits de sa marque. Il interroge 500 consommateurs au hasard. Parmi ceux-ci, 425 sont satisfaites. L'hypothèse est-elle acceptable, au seuil de $95\,\%$?