

1 Relation entre fonction et dérivée

Une relation où figurent à la fois une fonction f et sa dérivée f' est appelée équation différentielle d'ordre 1.

- On considère l'équation différentielle $(E_1) : f'(x) = f(x)$ où f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Connaissez-vous une fonction qui, lorsqu'on la dérive, reste inchangée ?
- Soit l'équation différentielle $(E_2) : f'(x) = 2f(x)$ où f est une fonction définie et dérivable sur I .

(a) Remplir le tableau suivant :

$f(x)$	$2x - 1$	$\ln(2x)$	e^{2x+3}	$\cos(2x)$	$5 + e^{2x}$
$f'(x)$					
$f'(x) = 2f(x)?$					

- (b) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto k \times e^{ax}$ où k et a sont des constantes réelles. Déterminer les valeurs de k et a permettant d'obtenir une solution de (E_2) .

Propriété 1.

On considère l'équation différentielle $y' + ay = 0$ où a est un réel et y une fonction dérivable de la variable x définie sur \mathbb{R} . Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies par :

$$f(x) = k e^{-ax} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}$$

2 Désintégration des noyaux radioactifs

Les noyaux des atomes d'un corps radioactif se désintègrent selon la loi suivante : si $N(t)$ est le nombre de noyaux présents à l'instant t (t en années), pendant la durée Δt , la variation $\Delta N(t)$ du nombre de noyaux est proportionnelle à Δt et à $N(t)$.

Les physiciens écrivent : $\Delta N(t) = -\lambda N(t)\Delta t$ avec $\lambda > 0$ la constante caractéristique du noyau.

En faisant tendre le temps d'observation vers 0, on obtient la relation $N'(t) = -\lambda N(t)$ en supposant que la fonction $N : t \mapsto N(t)$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Pour le carbone 14, on obtient $\lambda = \frac{\ln 2}{5730}$.

- En déduire l'expression de la quantité de carbone-14 en fonction du temps.
- Quel est le nombre initial de noyaux N_0 ?
- Quelle sera la proportion de C-14 restant après 10 000 ans ? Après 20 000 ans ?
- La demie-vie est le temps au bout duquel le nombre initial N_0 de noyaux a diminué de moitié. Quelle est la demie-vie du carbone-14 ?

3 Applications à la datation

- Une des premières applications est la datation de la grotte de Lascaux en 1949. La proportion de C-14 dans les pigments des fresques était d'environ 16%. Qu'elle est l'âge de ces fresques ?
- Le squelette d'un « homme de Cro-Magnon » contient 5% de C14. Quel est son âge ?