

## 1 Définition

### Définition 1.

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **géométrique** s'il existe un réel  $q$  non nul appelé **raison** de la suite tel que pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

### Rappel.

formule par récurrence de la suite

Autrement dit, on passe d'un terme de la suite au suivant en multipliant toujours par le même nombre  $q$ .

### Exemple 2

- 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 est une suite géométrique de premier terme 1 de raison 2.

### Exemple 3

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la suite géométrique de premier terme  $u_0 = 5$  de raison  $q = -2$ .

La définition de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par récurrence est  $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -2u_n \end{cases}$ .

- $u_1 = -2u_0 = -2 \times 5 = -10$  ;
- $u_2 = -2u_1 = -2 \times (-10) = 20$  ;
- $u_3 = -2u_2 = -2 \times 20 = -40$ .

### Remarque.

il est nécessaire de connaître l'un des termes de la suite pour calculer tous les autres, il s'agit en général du premier

**Point méthode** : dans de nombreuses situations, on a une augmentation ou une diminution de  $t\%$  (par an, par mois... ). La suite est géométrique de raison  $1 + \frac{t}{100}$  pour une augmentation, et  $1 - \frac{t}{100}$  pour une diminution.

### Remarque.

c'est souvent le cas en économie (placement, chiffre d'affaire, production...)

## 2 Calcul du terme de rang $n$

Avec la formule par récurrence, il est difficile de calculer n'importe quel terme de la suite car il faudrait pour cela connaître le précédent.

### Propriété 4.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de premier terme  $u_0$  de raison  $q$ ,

- pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n = u_0 \times q^n$  ;
- pour tous  $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $n > p$  on a  $u_n = u_p \times q^{n-p}$ .

### Rappel.

formule explicite de la suite

### Exemple 5

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite géométrique de premier terme  $u_0 = 3$  de raison  $q = 2$  :

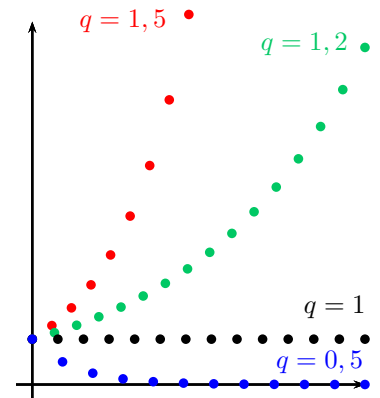
- la formule par récurrence donne  $u_{n+1} = 2u_n$  ;
- la formule explicite donne  $u_n = 3 \times 2^n$  ;  
le terme de rang 5 est :  $u_5 = 3 \times 2^5 = 96$ .

### 3 Sens de variation

#### Propriété 6.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de premier terme et de raison  $q$  tous les deux strictement positif, alors :

- si  $0 < q < 1$ , la suite est strictement décroissante ;
- si  $q = 1$ , la suite est constante ;
- si  $q > 1$ , la suite est strictement croissante.



### 4 Somme des $n$ premiers termes

#### Propriété 7.

La somme des  $n + 1$  premiers termes de la suite géométrique  $(q^n)$  de raison  $q \neq 1$  est :

$$S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Pour une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$ , il faut multiplier par  $u_0$  l'expression précédente.



Idée de la démonstration :

$$S = 1 + q + \dots + q^n$$

$$Sq = q + \dots + q^n + q^{n+1}$$

$$S - Sq = 1 - q^{n+1}$$

$$S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

#### Exemple 8

Vers  $-3\,000$  avant J.C., le roi Belkib cherche à tout prix à tromper son ennui. Il promet une récompense exceptionnelle à qui lui proposerait une distraction qui le satisferait. Le sage Sissa lui présente le jeu d'échecs. Le souverain, enthousiaste, demande à Sissa ce que celui-ci souhaiterait en échange de ce cadeau extraordinaire !

Humblement, Sissa demande au prince de déposer un grain de riz sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, et ainsi de suite pour remplir l'échiquier en doublant la quantité de grain à chaque case.

Le prince accorde immédiatement cette récompense. Est-ce une bonne affaire ?

On peut modéliser ce « deal » par une suite géométrique de raison 2. Il y a 64 cases dans un échiquier donc :

$$S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63}$$

$$= \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2}$$

$$= 2^{64} - 1$$

$$S = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

Sachant que 1 000 grains de riz pèsent environ 30 grammes, cette somme  $S$  correspond à  $18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \times 30 \div 1\,000 = 553\,402\,322\,211\,268\,548$  soit environ 500 milliards de tonnes de riz !!!

