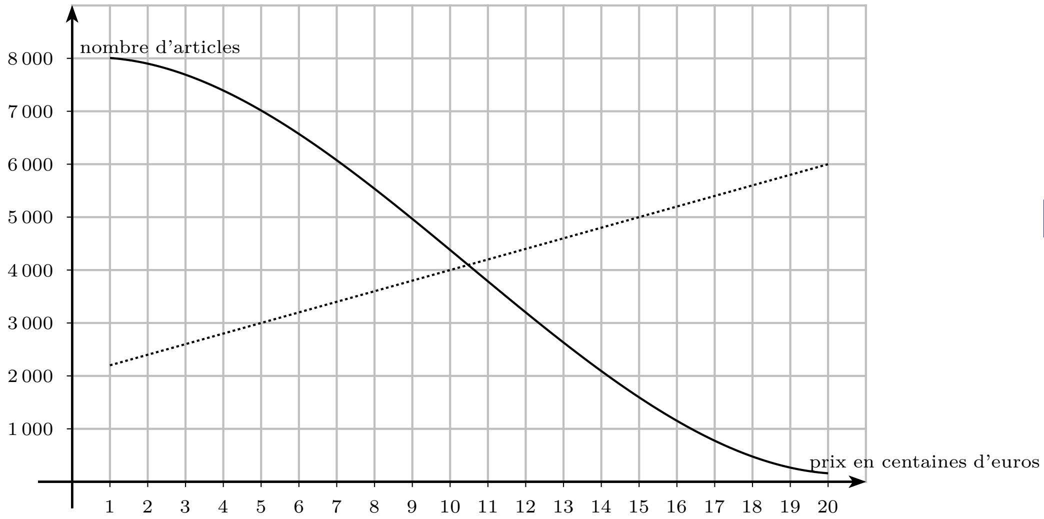
Exercice 1

Le nombre $x \in [1\,;\,20]$ désigne un prix en centaine d'euros.
La fonction f représente, en fonction du prix x de l'article, la demande des clients (la quantité d'articles qu'ils sont prêts à acheter à ce prix). Elle est représentée en traits pleins.
La fonction g représente, en fonction du prix x d'un article, l'offre d'un vendeur (la quantité d'articles qu'il est prêt à vendre à ce prix). Elle est tracée en trait pointillés.



1. Par lecture graphique déterminer :
   (a) Les sens de variation respectifs de f et g sur l'intervalle $[1\,;\,20]$.
   (b) Pour un prix de 500 €, le nombre de clients non satisfaits (qui n'ont pas pu acheter l'article faute de quantités vendues suffisantes).
   (c) Le prix d'équilibre α : prix pour lequel l'offre et la demande sont égales.
   (d) Le tableau de signes de $f(x) - g(x)$ sur l'intervalle $[1\,;\,20]$.
   (e) Justifier par le calcul que $g(x) = 200\,x + 2\,000$ (*on utilisera des points de la droite dont les coordonnées sont simples*).
2. La fonction demande f est donnée pour $x \in [1\,;\,20]$ par $f(x) = 2x^3 - 63x^2 + 68x + 8\,000$. Pour $x \in [1\,;\,20]$, on pose $d(x) = f(x) - g(x)$.
   (a) Calculer $d(5)$ et interpréter le résultat.
   (b) Montrer que $d'(x) = 6x^2 - 126x - 132$ pour $x \in [1\,;\,20]$ et dresser le tableau de variations de d sur l'intervalle $[1\,;\,20]$.
   (c) Démontrer que l'équation $d(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [1\,;\,20]$.
   (d) À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près, puis le prix d'équilibre à l'euro près ainsi que la quantité d'objets échangés à ce prix.
   (e) En déduire, le tableau de signes de $d(x)$ et la position relative des courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[1\,;\,20]$.
3. On cherche à optimiser l'argent total (la recette) encaissé par les commerçants par la vente de l'article. On note $R(x)$ cette somme en centaine d'euros.
   (a) Expliquer pourquoi, si x est le prix de l'article en centaine d'euros, on a $R(x) = xf(x)$.
   (b) À l'aide de la calculatrice et en choisissant une fenêtre adaptée, déterminer le prix, à l'euro près, qui maximise $R(x)$.

Exercice 2

Sur un marché supposé parfaitement concurrentiel, la rencontre de l'offre et de la demande détermine le prix d'équilibre du marché. C'est celui qui permettra de réaliser le maximum d'échanges.
Un nouvelle console de jeux est mise en vente sur le marché.
Soit x le prix unitaire de cette console, en centaines d'euros.
La fonction d'offre des fournisseurs (en milliers de consoles) est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,6]$ par $f(x) = 5 + 0,9x + 0,45x^3$.
La fonction demande des consommateurs (en milliers de consoles) est modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,6]$ par $g(x) = 0,85x^2 - 12x + 50$.

1. À l'aide de la calculatrice, répondre aux questions suivantes :
   (a) Déterminer le prix d'équilibre du marché à l'euro près.
   (b) Donner la quantité correspondante de consoles de jeux.
   (c) Sur quel intervalle de prix (en centaines d'euros) l'offre est-elle supérieure à la demande ? Comment-peut-on l'expliquer ?
2. On se propose de démontrer les résultats précédents par le calcul. Soit h la fonction définie sur $[0\,;\,6]$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.
   (a) Étudier les variations de h sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.
   (b) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[0\,;\,6]$. Donner une approximation de α à 10^{-2} près.
   (c) En déduire le tableau de signes de $h(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.
   (d) Faire le lien avec la première partie.