1 Notion de continuité

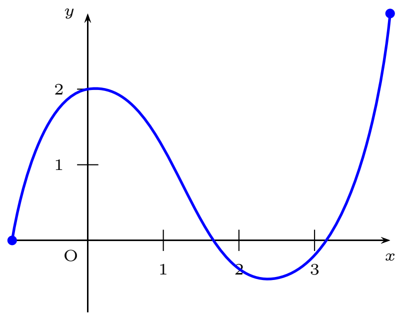
Définition 1.

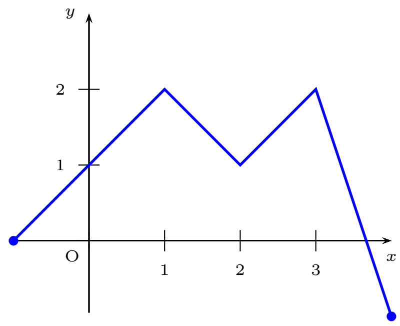
Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est **continue** sur I lorsque sa courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou).

?

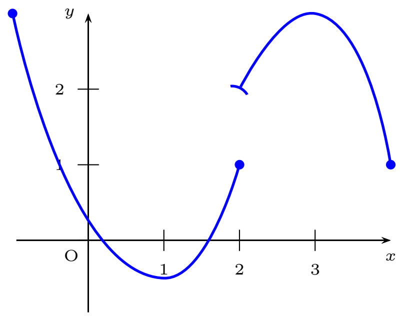
autrement dit, on peut la tracer sans lever le crayon

Illustrations :





fonctions continues sur $[-1\,;\,4\,]$: les courbes peuvent être tracées d'un seul morceau, même si elles présentent des « angles »



fonction non continue en 2 : la courbe présente un saut au point d'abscisse 2

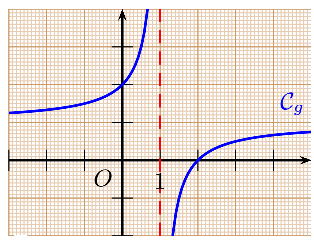
Proriété 2.

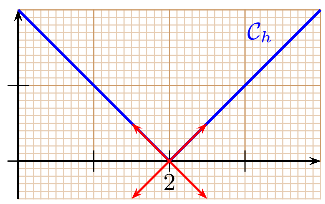
- Les fonctions usuelles (affines, carré, cube, inverse, racine carrée, polynôme) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.
- La somme, le produit, l'inverse, le quotient de fonctions continues est continue.
- Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

Attention : une fonction continue n'est pas forcément dérivable !

Exemple 3

- La fonction $f : x \mapsto x^3 - 5x + 3$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $g : x \mapsto \dfrac{x-2}{x-1}$ est continue sur $]-\infty\,;1\,[$ et sur $]\,1\,;+\infty\,[$ mais elle n'est pas continue sur $]-\infty\,;+\infty\,[$.
- La fonction h définie sur $[\,0\,;\,4\,]$ par $\begin{cases} y = -x+2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ y = x-2 & \text{si} \quad 2 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$
  est continue sur $[\,0\,;\,4\,]$ mais elle n'est pas dérivable en 2 car elle n'admet pas la même dérivée selon si on se place « à gauche » ou « à droite » de 2.





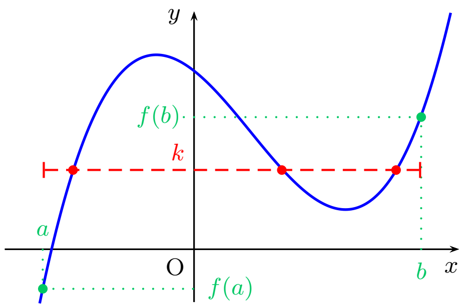
2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4.

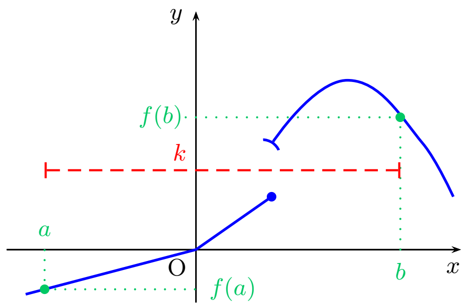
Si f est une fonction continue sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$ alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution $\alpha \in [\,a\,;\,b\,]$.

Remarque.
le théorème s'applique sur un intervalle de la forme $[\,a\,;\,b\,[$, $]\,a\,;\,b\,]$ ou $]\,a\,;\,b\,[$

Illustrations :



f est continue sur l'intervalle $[\,a\,;\,b\,]$.
L'équation $f(x) = k$ a au moins une solution.
Ici, elle en a trois.



f n'est pas continue sur l'intervalle $[\,a\,;\,b\,]$.
Il existe des réels k entre $f(a)$ et $f(b)$ pour lesquels l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.

Proriété 5.

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$ alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution $\alpha \in [\,a\,;\,b\,]$.

Remarque.
monotone = croissante ou décroissante

En pratique, pour montrer que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur $[\,a\,;\,b\,]$, on peut procèder ainsi :

- on calcule la dérivée de f afin d'obtenir son signe ;
- on construit le tableau de variations de f sur l'intervalle $[\,a\,;\,b\,]$;
- chaque « flèche oblique » traduisant la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur un intervalle, on conclut sur l'unicité de la solution.

x	a	α	b
f			$f(b)$
		k	
	$f(a)$		

Si l'on souhaite donner le signe de f, on détermine les éventuels intervalles où la fonction s'annule, c'est à dire les intervalles $[\,a\,;\,b\,]$ pour lesquels $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.

Exemple 6

On considère la fonction f définie sur $[-3\,;\,3]$ par $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + 5$.

On souhaite étudier cette fonction : variations, solutions de l'équation $f(x) = 0$, signe.

- **Fonction dérivée.**
  f est continue comme somme de fonctions continues. f est de plus dérivable, de dérivée $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2)$.

- **Signe de la dérivée.**
  On détermine le signe de $x^2 - x - 2$ en cherchant ses racines : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$.
  Le discriminant est positif, il y a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{2} = -1 \qquad\qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{2} = 2$$

  La fonction $f'(x) = 3(x+1)(x-2)$ est positive sauf entre ses racines -1 et 2.

- **Tableau de variations.**
  On en déduit les variations de la fonction f sur $[-3\,;\,3]$:

x	-3		-1		2		3
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$-17,5$	$\nearrow$	$8,5$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$0,5$

- **Nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.**
  — f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-3\,;\,-1]$.
  $f(-3) < 0$ et $f(-1) > 0$ donc, il existe une unique solution α à l'équation $f(x) = 0$ sur $[-3\,;\,-1]$.
  — f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[-1\,;\,2]$.
  $f(-1) > 0$ et $f(2) < 0$ donc, il existe une unique solution β à l'équation $f(x) = 0$ sur $[-1\,;\,2]$.
  — f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[2\,;\,3]$.
  $f(2) < 0$ et $f(3) > 0$ donc, il existe une unique solution γ à l'équation $f(x) = 0$ sur $[2\,;\,3]$.
  L'équation $f(x) = 0$ admet donc trois solutions sur l'intervalle $[-3\,;\,-1]$.

- **Solutions plus précises.**
  On utilise la table de la calculatrice : on commence par déterminer les solutions à 10^{-1} près, puis on affine.

X	Y1
-2.5	-5
-2.4	-3.064
-2.3	-1.302
-2.2	.292
-2.1	1.724
-2	3

X	Y1
-2.24	-.3258
-2.23	-.1689
-2.22	-.0136
-2.21	.13999
-2.2	.292
-2.19	.44239

X	Y1
-2.222	-.0446
-2.221	-.0291
-2.22	-.0136
-2.219	.00179
-2.218	.01721
-2.217	.03261

  On trouve $\alpha \approx -2,219, \beta \approx 0,762$ et $\gamma \approx 2,958$ à 10^{-3} près.

- **Signe de f.**
  On utilise les racines $\alpha; \beta$ et γ et le tableau de variations :

x	-3		α		β		γ		3
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	