SUITES

I. GENERALITES

a. Définition et notations

On appelle **suite numérique**, toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$
Une suite se note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_n)_{n \geq 0}$ ou (u_n)
On dit que u_n est **le terme général** de la suite (u_n) , **le terme de rang n** ou **le terme d'indice n**
u_0 est le **terme initial** de la suite (u_n)

Comment présenter une suite :

- On peut présenter une suite sous forme de liste : on considère la suite $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$
- Le plus souvent, on la présente par son terme général : soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2$

Exemple :
Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3n + 10$
Calculer les termes d'indice 0, 1, 2, 3 et 10.

b. Différentes façons de définir une suite

Par une formule explicite
Elle permet de calculer directement à partir de n le terme d'indice n

Exemples :
La suite (u_n) définie par $u_n = n^2$
La suite (v_n) définie par $v_n = -2n + 1$
Calculer u_0, u_1, u_2, u_9, v_0, v_1, v_2 et v_9

Par récurrence
Ceci nous permet de calculer de proche en proche tous les termes de la suite (u_n)

Exemple :
On donne $u_0 = 0$ et on considère la relation $u_{n+1} = 2u_n + 3$
Calculer les 5 premiers termes de la suite.

c. Sens de variation

- Une suite (u_n) est **croissante** si, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$
  $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \ldots$
- Une suite (u_n) est **décroissante** si, pour tout entier naturel n , $u_n \geq u_{n+1}$
  $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \ldots$
- Une suite (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante

Remarques :

- Si pour tout entier naturel n $u_n = u_{n+1}$, on dit que la suite est **constante**
- Toutes les suites ne sont pas croissantes ou décroissantes

Exemple : la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est-elle croissante ? décroissante ?

Comment fait-on dans la pratique ?

- On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$
- Ou, si la suite est à termes strictement positifs (ou strictement négatifs), on compare le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

Exemple :
Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) définies par :
$u_n = n - 2$ et $v_n = 2^n$

d. Représentation graphique

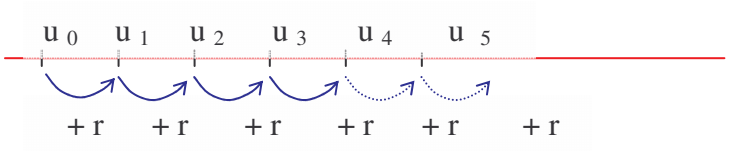
Soit P un plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la représentation graphique d'une suite est l'ensemble des points de coordonnée $(n ; u_n)$

Exemple :
Construire la suite définie pas $u_n = -4 + 2n$

II. SUITES ARITHMETIQUES

a. Définition par récurrence

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite arithmétique** , s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n,
on ait $\mathbf{u_{n+1} = u_n + r}$
Le réel r est appelé **raison** de la suite (u_n)



On passe d'un terme de la suite au terme suivant, en ajoutant r .

Exemples :

- La suite définie par $u_{n+1} = u_n - 3$ est une suite arithmétique de raison $r = -3$
- La suite des entiers naturels est une suite arithmétique de raison 1
- La suite des entiers naturels impairs est une suite arithmétique de raison 2
- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 4n + 4$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 4 - (4n - 4) = 4$
  Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n + 4$ et (u_n) est une suite arithmétique de raison 4

Plus généralement, toute suite (u_n) définie par $u_n = an + b$ est une suite arithmétique de raison a et de premier terme b

b. Définition par formule explicite

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r
Alors, pour tout entier naturel n , on a : $\mathbf{u_n = u_0 + nr}$

Démonstration :

Additionnons membre à membre les n égalités ci-contre: $\begin{cases} u_1 = u_0 + r \\ u_2 = u_1 + r \\ \dots\dots\dots\dots \\ u_{n-1} = u_{n-2} + r \\ u_n = u_{n-1} + r \end{cases}$

On obtient : $(u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}) + u_n = u_0 + (u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}) + n\,r$

D'où : $u_n = u_0 + nr$

Exemple :

Soit un la suite arithmétique définie par u0 = 7 et r = 12.
Donner la formule explicite et calculer u1 et u6

c. Monotonie

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r
- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante
- Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante

d. Représentation graphique

La représentation graphique de la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r est constituée des points appartenant à la droite d'équation $y = rx + u_0$

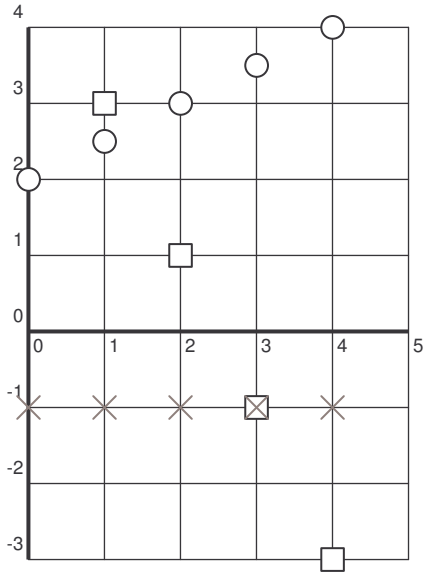
Remarque :
On retrouve ainsi le sens de variation de la suite :
- Si r est positif, la fonction est croissante, ainsi que la suite
- Si r est négatif, la fonction est décroissante, ainsi que la suite
- Si r est nul, la fonction est constante, ainsi que la suite

Exemples :
Représenter les suites suivantes :

$u_n = \frac{1}{2}n + 2$

(v_n) à pour raison 0 et pour premier terme – 1

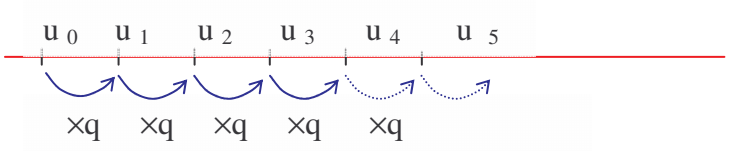
$w_{n+1} = w_n - 2$ et $w_0 = 5$



II. SUITES GEOMETRIQUES

a. Définition par récurrence

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite géométrique** , s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n,
on ait $\mathbf{u_{n+1} = q \times u_n}$
Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n)



On passe d'un terme de la suite au terme suivant, en multipliant par q .

Exemples :

- La suite définie par $u_{n+1} = 2 \times U_n$ est une suite géométrique de raison q = 2
- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 4^n$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} / u_n = 4^{n+1} / 4^n = 4$
  Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = 4 \times u_n$ et (u_n) est une suite arithmétique de raison 4

b. Définition par formule explicite

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r
Alors, pour tout entier naturel n , on a : $\mathbf{u_n = u_0 \times q^n}$

Exemple :
Soit un la suite arithmétique définie par u0 = 7 et r = 12.
Donner la formule explicite et calculer u1 et u6

c. Monotonie

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison q

- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est strictement croissante
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante