SUITES NUMÉRIQUES

Table des matières

I Définition et génération d'une suite — **2**
I.1 Notion de suite numérique 2
I.2 Modes de génération d'une suite 2

II Suites arithmétiques — **3**
II.1 Définition 3
II.2 Calcul du terme de rang n 4
II.3 Somme des n premiers termes 4

III Suites géométriques — **5**
III.1 Définition 5
III.2 Calcul du terme de rang n 6
III.3 Somme des n premiers termes 6

La notion de suite est indissociable des procédures itératives utilisées dès l'Antiquité pour trouver des approximations de nombres irrationnels ou de grandeurs à mesurer : surfaces, volumes ...

Les suites furent assez tôt utilisées de façon théoriques pour élaborer des solutions à des problèmes divers.
Aujourd'hui, la théorie des suites fournit un cadre de modélisation pour les autes sciences : économiques, biologie, écologie, physique ...

I Définition et génération d'une suite

I.1 Notion de suite numérique

Il arrive que l'on demande, lors de tests psychotechniques par exemple, de compléter "logiquement" une suite de nombres.

Exemple 1

- 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ... suite des puissances de 2 ou suite géométrique de raison 2,
- 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ... suite des carrés,
- -3, 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, ... suite arithmétique de raison 4,
- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... suite de Fibonacci.

En mathématiques, une <u>suite</u> u est une liste ordonnée de nombres réels : les éléments de cette liste sont appelés <u>termes</u> de la suite u, et sont tous repérés par leur rang dans la liste ; ainsi le premier terme est souvent noté u_0, le second u_1 et ainsi de suite ...

$$u = (\quad u_0 \quad ; \quad u_1 \quad ; \quad u_2 \quad ; \quad \dots \quad ; \quad u_{n-1} \quad ; \quad u_n \quad ; \quad u_{n+1} \quad ; \quad \dots \quad).$$

Définition 1
Une <u>suite</u> u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$.
A chaque entier naturel n on associe un nombre réel u_n de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 2
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite qui à chaque entier naturel non nul associe son inverse :

- $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{1}{2}$, $u_3 = \dfrac{1}{3}$, ..., $u_n = \dfrac{1}{n}$, ... (on remarque qu'ici la suite commence à l'indice 1).

I.2 Modes de génération d'une suite

Une suite peut être engendrée de deux manières :

Définition 2
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie de manière <u>explicite</u> lorsque chaque terme u_n est défini en fonction de son rang n, indépendamment des autres termes :

$$u_n = f(n) \qquad \text{où } f \text{ désigne une fonction.}$$

Cette relation permet de calculer n'importe quel terme de la suite.

Exemple 3
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = -5 + 7n$:

- $u_0 = -5 + 7 \times 0 = -5$,
- $u_1 = -5 + 7 \times 1 = 2$,
- $u_2 = -5 + 7 \times 2 = 9$,
- $u_6 = -5 + 7 \times 6 = 37$.

Définition 3
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence lorsque l'on connait son premier terme et une relation de la forme :

$$u_{n+1} = f(u_n) \qquad \text{où } f \text{ désigne une fonction.}$$

Cette relation de récurrence permet de calculer un terme de la suite à partir du terme précédent.

Exemple 4
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & -2u_n+1 \end{array}\right.$:

- $u_1 = -2u_0 + 1 = -2\times 3 + 1 = -5$,
- $u_2 = -2u_1 + 1 = -2\times(-5) + 1 = 11$,
- $u_3 = -2u_2 + 1 = -2\times 11 + 1 = -21$.

L'inconvénient dans cet exemple est que des termes "éloignés" du début de la suite sont difficiles d'accès : pour calculer u_{100} il faut, a priori, calculer tous les termes précédents, jusqu'à u_{99} ! !

II Suites arithmétiques

II.1 Définition

Définition 4
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe un réel r appelé raison de la suite tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Autrement dit, on passe d'un terme de la suite au suivant en ajoutant toujours le même nombre r.

Exemple 5
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$.
La définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence est $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 5 \\ u_{n+1} & = & u_n - 2 \end{array}\right.$:

- $u_1 = u_0 - 2 = 5 - 2 = 3$,
- $u_2 = u_1 - 2 = 3 - 2 = 1$,
- $u_3 = u_2 - 2 = 1 - 2 = -1$.

Exemple 6

- 5 ; 8 ; 11 ; 14 est une suite arithmétique de premier terme 5 de raison 3,
- 9 ; 7 ; 5 ; 3 ; 1 ; -1 est une suite arithmétique de premier terme 12 de raison -2.

Méthode : Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il faut montrer que pour tout entier naturel n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est un réel r constant.

Exemple 7
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 3n + 1$ est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ de raison 3 :

- Les trois premiers termes de la suite (u_n) sont $u_0 = 1$; $u_1 = 4$ et $u_2 = 7$.
- La différence $u_{n+1} - u_n$ semble constante, prouvons le :
  $u_{n+1} = 3(n+1) + 1 = 3n + 4$,
  $u_{n+1} - u_n = (3n+4) - (3n+1) = 3$ qui est la raison de la suite.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = n^2 + 1$ n'est pas une suite arithmétique :

- Les trois premiers termes de la suite (v_n) sont $v_0 = 1$; $v_1 = 2$ et $v_2 = 5$.
- La différence $v_{n+1} - v_n$ n'est donc pas constante. En effet : $v_1 - v_0 = 1$ et $v_2 - v_1 = 3$.

II.2 Calcul du terme de rang n

Propriété 1
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + nr$,
- Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p + (n-p)r$.

Exemple 8
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 12$ de raison 3 :

- Le terme de rang 50 est : $u_{50} = u_0 + 50 \times r = 12 + 50 \times 3 = 162$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de terme $u_{10} = 2$ de raison -4 :

- Le terme de rang 50 est : $u_{50} = u_{10} + (50 - 10) \times r = 2 + 40 \times (-4) = -158$.

II.3 Somme des n premiers termes

Propriété 2
Somme des n premiers entiers naturels :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Somme de N termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Démonstration de la première partie :
On additionne membre à membre les deux égalités suivantes :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & n-2 & + & n-1 & + & n & = & S_n \\ n & + & n-1 & + & n-2 & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 & = & S_n \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \ldots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & = & 2S_n \end{array}$$

Autrement dit, $2S_n = n \times (n+1)$ et donc $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemple 9
Calcul de la somme des 10 premiers entiers naturels :

- $S_{10} = 1 + 2 + \ldots + 9 + 10 = \dfrac{10(10+1)}{2} = 55$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1$ de raison 2 :

- $S_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 4 \times \dfrac{u_1 + u_4}{2}$
- or, $u_4 = u_1 + (4-1) \times r = 1 + 3 \times 2 = 7$,
- $S_4 = 4 \times \dfrac{1+7}{2} = 16$.

III Suites géométriques

III.1 Définition

Définition 5
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe un réel q non nul appelé raison de la suite tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Autrement dit, on passe d'un terme de la suite au suivant en multipliant toujours par le même nombre q.

Exemple 10
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ de raison $q = -2$.
La définition de la suite $(u_n)_{n\in N}$ par récurrence est $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 5 \\ u_{n+1} & = & -2u_n \end{array}\right.$:

- $u_1 = -2u_0 = -2 \times 5 = -10$,
- $u_2 = -2u_1 = -2 \times (-10) = 20$,
- $u_3 = -2u_2 = -2 \times 20 = -40$.

Exemple 11

- 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 est une suite géométrique de premier terme 1 de raison 2.

Méthode : Pour démontrer qu'une suite est géométrique, il faut s'assurer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est non nul puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est un réel q constant.

Exemple 12
Soit $(u_n)_{n\in N}$ la suite définie par $u_n = 2 \times 3^n$.

- pour tout entier naturel n, $u_n \neq 0$,
- $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2 \times 3^{n+1}}{2 \times 3^n} = 3$,
- $u_0 = 2 \times 3^0 = 2 \times 1 = 2$:
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ de raison 3.

III.2 Calcul du terme de rang n

Propriété 3
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme u_0 de raison q,

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 \times q^n$,
- Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Exemple 13
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ de raison $q = 2$:
- Le terme de rang 5 est : $u_5 = u_0 \times q^5 = 3 \times 2^5 = 96$.

III.3 Somme des n premiers termes

Propriété 4
Somme des $(n+1)$ premières puissances d'un nombre réel (avec $q \neq 1$) :

$$S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Somme de $(n+1)$ termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

Exemple 14
La somme des 8 premières puissances de 2 vaut :
- $S = 1 + 2 + 2^2 \ldots + 2^8 = \dfrac{1 - 2^{8+1}}{1 - 2} = 511.$

EXERCICE
L'entreprise A dispose d'une somme de 50000 euros qu'elle veut faire fructifier.
On lui propose deux types de placement :
Type I : le capital est augmenté chaque année de 5000 euros.
Type II : le capital est augmenté chaque année de 7% du capital de l'année précédente.

1. Placement de type I : on note U_n le capital en euros à la fin de la $n^{ième}$ année ($U_0 = 50000$).
   (a) Calculer U_1 et U_2.
   (b) Exprimer U_n en fonction de n.
2. Placement de type II : on note V_n le capital en euros à la fin de la $n^{ième}$ année ($V_0 = 50000$).
   (a) Calculer V_1 et V_2.
   (b) Justifier que (V_n) est une suite géométrique de raison $1,07$. En déduire V_n en fonction de n.
3. Comparaisons : quel est le type de placement le plus avantageux pour l'entreprise A :
   (a) si elle compte retirer son argent à la fin de la $8^{ième}$ année ?
   (b) si elle compte retirer son argent à la fin de la $12^{ième}$ année ?
4. Au bout de combien d'années le capital disponible représente-t-il le double du capital initial :
   (a) avec le placement de type I ?
   (b) avec le placement de type II ?