PROBABILITÉS

Table des matières

On fait remonter à la correspondance de 1964 entre Pascal et Fermat, sur un problème de jeu de hasard, l'acte de naissance du calcul des probabilités.

Après trois siècles de recherche, le calcul des probabilités a pu fournir, au début du XX^e siècle, les bases théoriques nécessaires au développement de la statistique et a investi de très nombreux domaines de la vie scientifique, économique et sociale.

Le but des probabilités est d'essayer de rationaliser le hasard : quelles sont les chances d'obtenir un résultat suite à une expérience aléatoire ?

Quelles chances ai-je d'obtenir "pile" en lançant une pièce de monnaie ? Quelles chances ai-je d'obtenir "6" en lançant un dé ? Quelles chances ai-je de valider la grille gagnante du loto ?

I Rappels : Vocabulaire des événements

I.1 Vocabulaire

Définition 1
Chaque résultat possible et prévisible d'une expérience aléatoire est appelé éventualité liée à l'expérience aléatoire.

Exemple 1
- Lancer un dé à six faces : "obtenir 2" est une éventualité de cette expérience aléatoire.
- Tirage des six numéros gagnants du Loto : "obtenir la combinaison $2 - 5 - 17 - 23 - 36 - 41$" est une éventualité.

Définition 2
L'ensemble formé par les éventualités est appelé univers, il est très souvent noté Ω.

Exemple 2
- Lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{\text{pile};\text{face}\}$.
- Lancer un dé à six faces : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Définition 3
- *Un événement d'une expérience aléatoire est une partie quelconque de l'univers,*
- *Un événement ne comprenant qu'une seule éventualité est un événement élémentaire.*

Exemple 3
Lors du lancer d'un dé à 6 faces :
- A = "obtenir un 5" est un événement élémentaire que l'on peut noter $A = \{5\}$,
- B = "obtenir un numéro pair" est un événement que l'on peut noter $B = \{2; 4; 6\}$.

Définition 4

- *L'événement qui ne contient aucune éventualité est l'événement impossible, noté $\varnothing$,*
- *L'événement composé de toutes les éventualités est appelé événement certain.*

Exemple 4

- Tirage des six numéros gagnants du loto : "obtenir la combinaison $3-25-38-59-67-91$" est un événement impossible (les numéros vont de 1 à 49).
- Lancer d'un dé à six faces : "obtenir un nombre positif" est un événement certain.

Définition 5

Pour tout événement A il existe un événement noté $\overline{A}$ et appelé événement contraire de A, qui est composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.
On a en particulier $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Exemple 5

- Lancer d'une pièce de monnaie : si $A = \{\text{pile}\}$ alors son événement contraire est $\overline{A} = \{\text{face}\}$.
- Lancer d'un dé à six faces : si A est l'événement "obtenir un nombre inférieur ou égal à 4", alors son événement contraire $\overline{A}$ est l'événement "obtenir 5 ou 6".

Dans toute la suite du cours, on suppose que Ω est l'univers associé à une expérience aléatoire, et A et B deux événements associés à cet univers.

I.2 Intersection et réunion d'événements

Définition 6

- *Intersection d'événements : événement constitué des éventualités appartenant à A et à B noté $A \cap B$ (se lit "A inter B" ou "A et B"),*
- *Réunion d'événements : événement constitué des éventualités appartenant à A ou à B noté $A \cup B$ (se lit "A union B" ou "A ou B").*

Remarque 1

Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que les événements sont disjoints ou incompatibles.

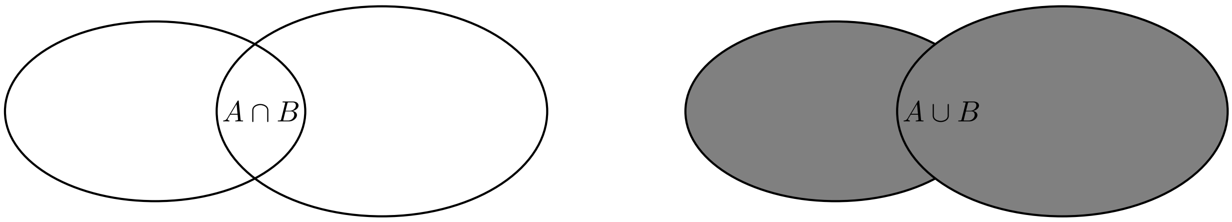
Exemple 6

On considère l'ensemble des chiffres.
On note A l'événement "obtenir un chiffre pair" et B l'événement "obtenir un chiffre strictement inférieur à six"

- $A \cap B =$ "obtenir un chiffre pair et inférieure strictement à six" : $A \cap B = \{2; 4\}$,
- $A \cup B =$ "obtenir un chiffre pair ou inférieur strictement à six" : $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10\}$.

I.3 Représentation des évenements

Diagrammes ou patates



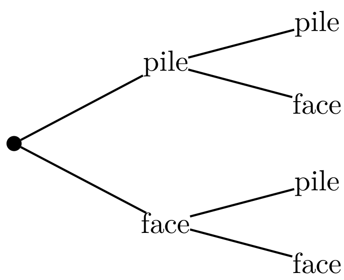
Tableaux

On jette deux dés à quatre faces (tétraèdre régulier) et on calcule la produit obtenu :

	1	**2**	**3**	**4**
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

Arbres

On lance une pièce de monnaie deux fois, on peut schématiser cette expérience par un arbre :



II Rappels : Calcul de probabilités

Définition 7
La probabilité d'un événement d'univers Ω est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constitue.

Définition 8
On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité.
Dans ce cas, on a : $P(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.

Remarque 2
Dans un exercice, pour signifier qu'on est dans une situation d'équiprobabilité on a généralement dans l'énoncé un expression du type :
- on lance un dé non pipé,
- dans une urne, il y a des boules indiscernables au toucher,
- on rencontre au hasard une personne parmi ...

Exemple 7
On lance un dé équilibré à six faces. On considère l'événement A : "obtenir un chiffre pair" et l'événement B : "obtenir un diviseur de six".
- Le dé est équilibré, on est donc dans une situation d'équiprobabilité.
- $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{1; 2; 3; 6\}$,
- donc, $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$,
- et $P(B) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Propriété 1
Soit A et B deux événements, on a les propriétés suivantes :
- $P(\varnothing) = 0$.
- $P(\Omega) = 1$.
- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemple 8
On considère l'ensemble E des entiers de 1 à 20. On choisit l'un de ces nombres au hasard.
A est l'événement : « le nombre est multiple de 3 » :
- $A = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$,

B est l'événement : « le nombre est multiple de 2 » :
- $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$,

Calul des probabilités :
- $P(A) = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10} = 0,3$.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{3}{10} = \dfrac{7}{10} = 0,7$.
- $P(B) = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2} = 0,5$.
- $P(A \cap B) = \dfrac{3}{20} = 0,15$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{6}{20} + \dfrac{10}{20} - \dfrac{3}{20} = \dfrac{13}{20} = 0,65$.

III Variable aléatoire

III.1 Notion de variable aléatoire

Définition 9
Une grandeur numérique X prenant, lors d'une expérience aléatoire, des valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ avec des probabilités $p_1, p_2, ..., p_n$ est une variable aléatoire.

Exemple 9
Un jeu de hasard consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces. Le lanceur gagne la somme double de la valeur de la face obtenue si celle-ci est paire, sinon, il perd le double de la valeur indiquée par le dé.
On appelle X le gain, positif ou négatif, du joueur après un lancer.

- Ici, l'ensemble des issues possibles est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$,
- on a défini avec X une variable aléatoire réelle telle que :
  $X(1) = -2$, $X(2) = 4$, $X(3) = -6$, $X(4) = 8$, $X(5) = -10$ et $X(6) = 12$.

III.2 Loi d'une variable aléatoire

Définition 10
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est la fonction f qui a chaque valeur associe sa probabilité.

Remarque 3
En général, on présente la loi d'une variable aléatoire X sous la forme d'un tableau, qui récapitule les valeurs prises par X ainsi que les probabilités associées :

Valeurs de X : x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Probabilité : $p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Exemple 10
On reprend l'énoncé de l'exemple précédent. La loi de X est donnée par :

x_i	-10	-6	-2	4	8	12
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exemple 11
On dispose d'un jeu de 32 cartes. On tire une carte dans ce jeu, et on attribue à ce tirage la valeur X calculée suivant la règle suivante :

- si la carte est un Roi, X vaut 4 points,
- si la carte est une Dame, X vaut 3 points,
- si la carte est un Valet, X vaut 1 point,
- toutes les autres cartes valent 0 point.

La loi de X est donnée par :

x_i	0	1	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Remarque 4
On note que pour chacun de ces tableaux, la somme des probabilités élémentaires fait 1, en accord avec l'un des axiomes des probabilités !

III.3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Définition 11
La fonction de répartition de la variable aléatoire X est la fonction :

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \to & [\,0\,;\,1\,] \\ & x & \mapsto & F(x) = p(X \leq x). \end{array}$$

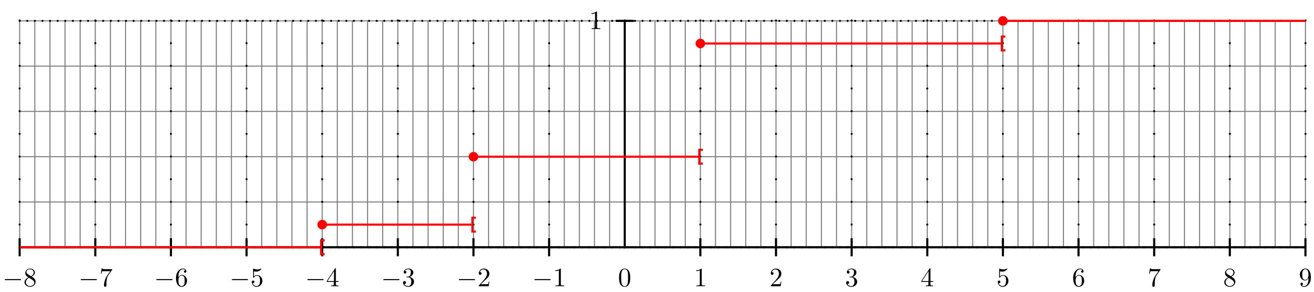
Exemple 12
Soit X la variable aléatoire dont la loi est donnée par :

x_i	-4	-2	1	5
$P(X = x_i)$	$0,1$	$0,3$	$0,5$	$0,1$

- La fonction de répartition F de X est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty; -4[\\ 0,1 & \text{si } t \in [-4; -2[\\ 0,4 & \text{si } t \in [-2; 1[\\ 0,9 & \text{si } t \in [1; 5[\\ 1 & \text{si } t \in [5; +\infty[. \end{cases}$$

- La fonction de répartition F de X admet la représentation graphique ci-dessous :



Le théorème suivant permet de tracer en pratique la fonction de répartition d'une variable aléatoire (discrète et finie) :

Propriété 2
La fonction de répartition F de X est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui a les propriétés suivantes :

- F est croissante sur $\mathbb{R}$,
- $\lim_{x \to -\infty} F(t) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(t) = 1$,
- F est constante par morceaux,
- la courbe représentative de F présente des "sauts" (est discontinue) aux points dont les abscisses sont des valeurs x_i de X, la hauteur des sauts étant la probabilité p_i.

III.4 Espérance d'une variable aléatoire

Définition 12
Soit X une variable aléatoire de loi :

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

On appelle espérance de la variable aléatoire X le réel noté $E(X)$ qui vaut :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i.$$

Remarque 5
Ce nombre important en probabilités représente la valeur moyenne de la variable aléatoire X.

Exemple 13
On reprend le jeu de cartes étudié précédemment.
On rappelle que la loi de X est donnée par :

x_i	0	1	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

D'où le calcul de l'espérance :
- $E(X) = 0 \times \dfrac{5}{8} + 1 \times \dfrac{1}{8} + 3 \times \dfrac{1}{8} + 4 \times \dfrac{1}{8}$
- $E(X) = \dfrac{8}{8} = 1$.
- Concretement, cela signifie "qu'en moyenne", le joueur gagne 1 point.

III.5 Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définition 13
Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de loi :

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

- *On appelle variance de la variable aléatoire X le réel noté $V(X)$ qui vaut :*

$$V(X) = p_1[x_1 - E(X)]^2 + p_2[x_2 - E(X)]^2 + ... + p_n[x_n - E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i[x_i - E(X)]^2.$$

- *On appelle écart-type de X le réel noté $\sigma(X)$ défini par :*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exemple 14
Calcul de la variance pour le jeu de cartes :

- $V(X) = \frac{5}{8}[0-1]^2 + \frac{1}{8}[1-1]^2 + \frac{1}{8}[3-1]^2 + \frac{1}{8}[4-1]^2$
- $V(X) = \frac{5}{8} + 0 + \frac{4}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4} = 2,25.$

D'où l'écart-type :

- $\sigma_x = \sqrt{\frac{9}{4}} = \sigma_x = \frac{3}{2} = 1,5.$

Le théorème suivant permet un calcul plus facile de la variance :

Théorème 1 (De Kœnig)

$$V(X) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + ... + p_nx_n^2 - E^2(X) = \sum_{i=1}^{n}(p_ix_i) - E^2(X).$$

Exemple 15
Autre méthode de calcul de la variance pour le jeu de cartes :

- $V(X) = \frac{5}{8} \times 0^2 + \frac{1}{8} \times 1^2 + \frac{1}{8} \times 3^2 + \frac{1}{8} \times 4^2 - 1^2$
- $V(X) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{9}{8} + \frac{16}{8} - 1 = V(X) = \frac{9}{4} = 2,25.$

Propriété 3

- La variance et l'écart-type d'une variable aléatoire réelle X sont des nombres positifs.
- L'écart-type mesure la dispersion des valeurs d'une variable aléatoire par rapport à son espérance.
- Si X est exprimé dans un certaine unité, σ_X l'est dans la même unité.

EXERCICE
Le Comité des fêtes d'un village organise une loterie à l'aide de deux urnes.
L'urne U$_1$ contient trois boules rouges notées R_1, R_2, R_3 et deux boules jaunes notées J_1, J_2.
L'urne U$_2$ contient quatre boules bleues notées B_1, B_2, B_3, B_4 et une boule verte V.
Pour participer à cette loterie, un joueur doit d'abord miser 3 €. Il tire ensuite au hasard une boule dans U$_1$, puis une boule dans U$_2$. Les boules sont indiscernables au toucher.
On suppose que tous les tirages de couples de boules sont équiprobables.

1. À l'aide d'un tableau ou d'un arbre montrer qu'il y a 25 couples de boules possibles.
2. Une boule rouge fait gagner 2 €. Une boule jaune fait gagner 3 €. Une boule bleue fait gagner 1 €. La boule verte fait gagner 5 €. À chaque tirage de 2 boules la variable aléatoire X associe le gain finalement réalisé par le joueur. Ainsi, en tenant compte de la mise de 3 €, le tirage d'une boule rouge et d'une boule verte occasionne finalement un gain de 4 €.
   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
   (b) Démontrer que $P(\mathrm{X} = 5) = \frac{2}{25}$.
   (c) Présenter en tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   (d) Quelle est la probabilité que le gain du joueur ne dépasse pas finalement 1 € ?
3. (a) Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X.
   (b) Le Comité s'aperçoit que son jeu est déficitaire. Expliquer quelle est, en nombre entier d'euros, la mise minimale qu'il faudrait demander afin de rendre le jeu favorable au Comité.