Limites

Table des matières

I Langage des limites

I.1 Limite d'une fonction en un point a

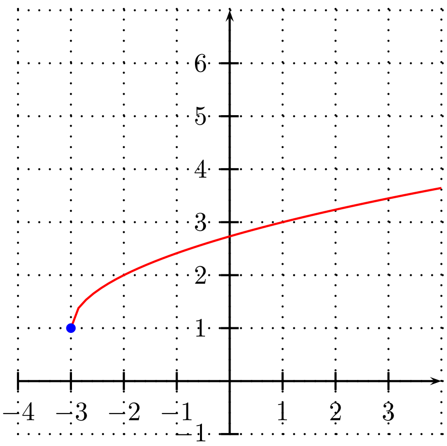
Définition 1
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel ou une borne de I.
Lorsque le réel x s'approche de a, si les nombres $f(x)$ deviennet de plus en plus

- *proches d'un réel l, on dit que f à pour limite l en a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.*
- *grands, on dit que f a pour limite $+\infty$ en a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.*
- *grands en valeur absolue et négatifs, on dit que f a pour limite $-\infty$ en a et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.*

Dans le cas où la limite en a vaut $\pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

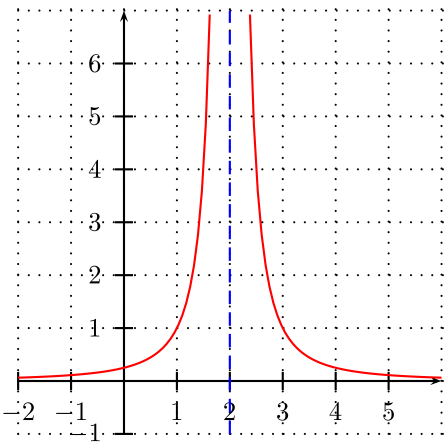
Exemple 1
"Visualisation" de limites en un point :

$f(x) = \sqrt{x+3} + 1$



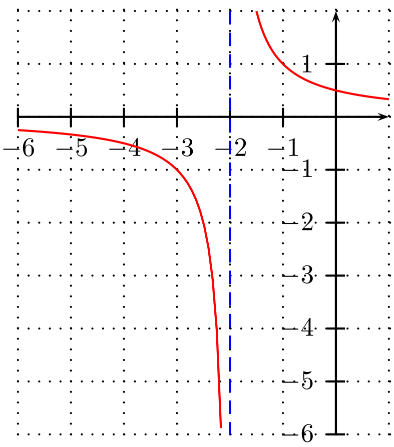
$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = 1$
Il n'y a pas d'asymptote.

$f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$



$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$
La courbe admet une asympyote verticale d'équation $x = 2$.

$f(x) = \dfrac{1}{x+2}$



$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$
La courbe admet une asympyote verticale d'équation $x = -2$.

Remarque 1
Certaines fonctions n'admettent pas de limite en a.
Par exemple, la fonction $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ n'admet pas de limite en 0 :

- sur $\mathbb{R}^*_-$, $f(x) = \dfrac{-x}{x} = -1$ donc, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$,
- sur $\mathbb{R}^*_+$, $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$ donc, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +1$.

I.2 Limite d'une fonction en l'infini

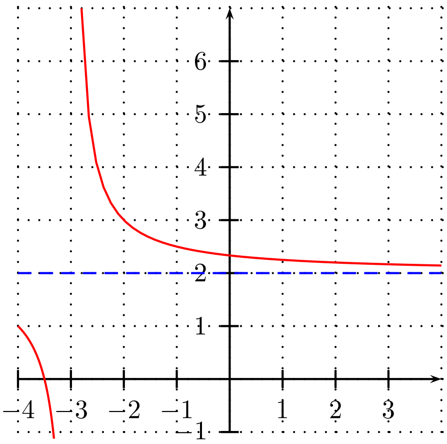
Définition 2
Soit f une fonction définie au moins sur $[a;+\infty[$. Lorsque le réel x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus

- *proches d'un réel l, on dit que f a pour limite l en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.*
- *grands, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.*
- *grands en valeur absolue et négatifs, on dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.*

Dans le cas où la limite en $+\infty$ est l, on dit que la droite d'équation $y = l$ est une <u>asymptote horizontale</u> à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

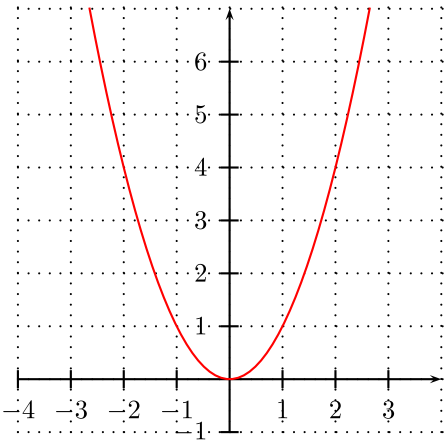
Exemple 2
"Visualisation" de limites en $+\infty$:

$f(x) = \dfrac{1}{x+3} + 2$



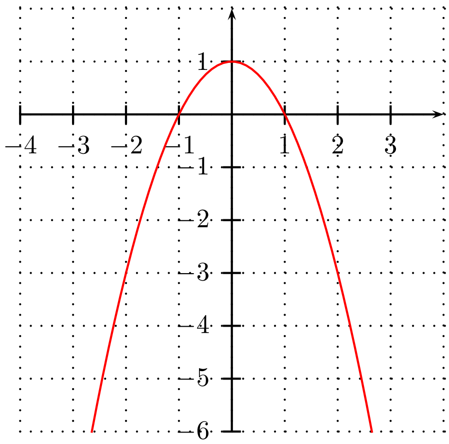
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$
La courbe admet une asympyote horizontale d'équation $y = 2$.

$f(x) = x^2$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
Il n'y a pas d'asymptote.

$f(x) = 1 - x^2$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
Il n'y a pas d'asymptote.

Remarque 2
Certaines fonctions n'admettent pas de limite en l'infini : par exemple les fonctions cosinus et sinus.

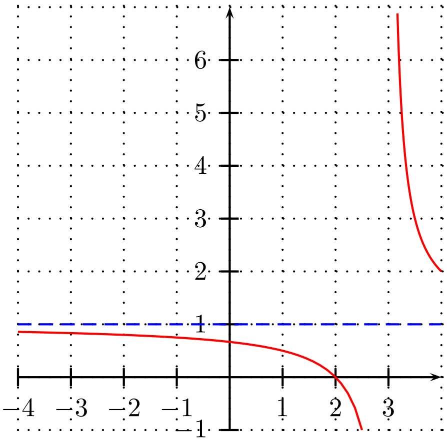
Définition 3
Soit f une fonction définie au moins sur $]-\infty;a]$. Lorsque le réel x prend des valeurs de plus en plus grandes en valeur absolue et négatives vers $-\infty$, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus

- *proches d'un réel l, on dit que f a pour limite l en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.*
- *grands, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.*
- *grands en valeur absolue et négatifs, on dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.*

Dans le cas où la limite en $-\infty$ est l, on dit que la droite d'équation $y = l$ est une <u>asymptote horizontale</u> à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

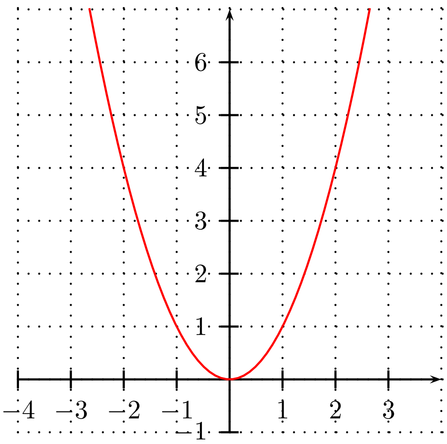
Exemple 3
"Visualisation" de limites en $-\infty$:

$f(x) = \dfrac{1}{x-3} + 1$



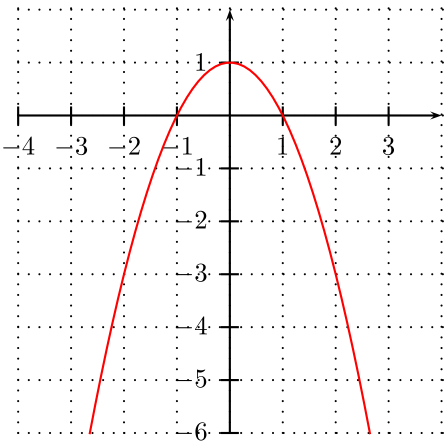
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$
La courbe admet une asympyote horizontale d'équation $y = 1$.

$f(x) = x^2$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
Il n'y a pas d'asymptote.

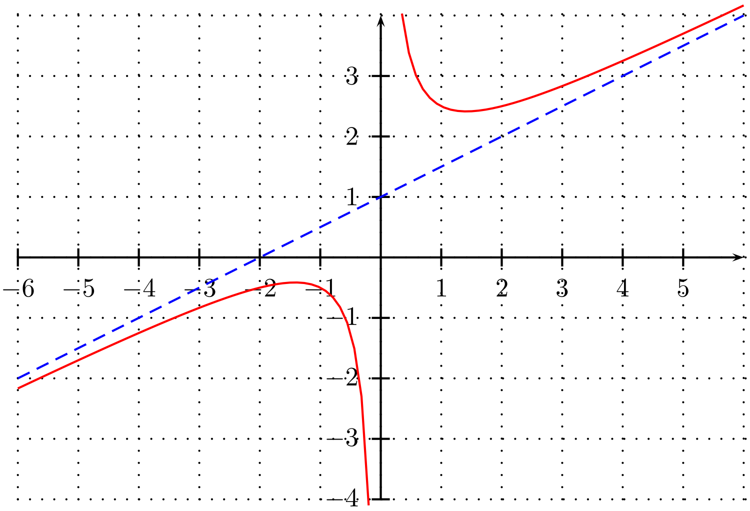
$f(x) = 1 - x^2$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
Il n'y a pas d'asymptote.

Définition 4
Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$, on dit alors que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.

Exemple 4
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x + 1$.



$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) \right] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0.$$

La courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

II Limites des fonctions usuelles

Voici un tableau qui résume les différentes limites des fonctions de référence :

$f(x)$ limite en	x	x^2	x^3	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0^-	0^+	0^-	indéfini	indéfini	aucune	aucune
$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$	0^-	0^+	0^-	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	indéfini	indéfini	0	1
$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$	0^+	0^+	0^+	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0^+	$+\infty$	0	1
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0^+	0^+	0^+	$+\infty$	0^+	aucune	aucune

III Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit, la notation "FI" désigne une Forme Indéterminée, c'est à dire qu'on ne sait pas calculer par une opération élémentaire.
La notation "$*$" signifie qu'il faut appliquer la "règle des signes".

III.1 Limite d'une somme

$\lim\ f$	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\ g$	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\ (f+g)$	$l+l'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Exemple 5
Calcul de "sommes" de limites :

- $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to0} x &=& 0\\ \lim\limits_{x\to0} x^3 &=& 0\end{array}\right\}\ \lim\limits_{x\to0}\left(x+x^3\right)=0.$
- $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} &=& 0^-\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 &=& +\infty\end{array}\right\}\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}+x^2\right)=+\infty$
- $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to+\infty} x &=& +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 &=& +\infty\end{array}\right\}\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+x^2\right)=+\infty.$
- $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to-\infty} x &=& -\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 &=& -\infty\end{array}\right\}\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+x^3\right)=-\infty.$
- $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 &=& +\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 &=& -\infty\end{array}\right\}\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x^3\right)$ est une forme indéterminée .

Remarque 3
Ces résultats englobent le cas de l'addition de constante, puisqu'on peut alors choisir une fonction f constante, dont la limite est partout cette constante.

Exemple 6
Addition d'une constante :

- $$\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0+} 3 & = & 3 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0+} \left(\dfrac{1}{x}+3\right) = +\infty$$
- La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

III.2 Limite d'un produit

$\lim\ f$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\ g$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\ (f \times g)$	$l \times l'$	$*\infty$	$*\infty$	FI

Exemple 7
Calcul de "produit" de limites :

- $$\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0} (x+3) & = & 3 \\ \lim\limits_{x\to 0} (x-1) & = & -1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0} [(x+3)\times(x-1)] = -3.$$
- $$\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 0^+} (x-3) & = & -3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} & = & +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0^+} \left[(x-3)\times\dfrac{1}{x}\right] = -\infty$$
- $$\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to -\infty} (x-1) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 & = & -\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to -\infty} [(x-1)\times x^3] = +\infty.$$
- $$\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to -\infty} (x^2+1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0^- \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to -\infty} \left[(x^2+1)\times\dfrac{1}{x}\right]$$ est une forme indéterminée .

Remarque 4
Ces résultats englobent le cas de la multiplication par une constante, puisqu'on peut alors choisir une fonction f constante, dont la limite est partout cette constante.

Exemple 8
Multiplication par une constante :

- $$\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to +\infty} -2 & = & -2 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 & = & +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to +\infty} (-2x^2) = -\infty.$$

III.3 Limite d'un quotient

$\lim f$	l	l	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	l'	$\pm\infty$	0
$\lim \left(\dfrac{f}{g}\right)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$*\infty$	$*\infty$	FI	FI

Exemple 9
Calcul de "quotients" de limites :

- $\left.\begin{array}{rcr} \lim\limits_{x\to 0} (x+3) & = & 3 \\ \lim\limits_{x\to 0} (x-2) & = & -2 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x+3}{x-2}\right) = -\dfrac{3}{2}.$
- $\left.\begin{array}{rcr} \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{1}{x}-3\right) & = & -3 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 & = & +\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\frac{1}{x}-3}{x^2}\right) = 0^-.$
- $\left.\begin{array}{rcr} \lim\limits_{x\to 0^+} x-4 & = & -4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x & = & 0^+ \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{x-4}{x}\right) = -\infty.$
- $\left.\begin{array}{rcr} \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}-3\right) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (x-1) & = & -1 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{\frac{1}{x}-3}{x-1}\right) = -\infty.$
- $\left.\begin{array}{rcr} \lim\limits_{x\to -\infty} (x-1) & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 & = & -\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x-1}{x^3}\right)$ est une forme indéterminée.
- $\left.\begin{array}{rcr} \lim\limits_{x\to 0} x^2 & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} & = & 0 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}\right)$ est une forme indéterminée .

Remarque 5
Ces résultats englobent le cas de la division par une constante, puisqu'on peut alors choisir une fonction f constante, dont la limite est partout cette constante.

Exemple 10
Division par une constante :

- $\left.\begin{array}{rcr} \lim\limits_{x\to +\infty} (x-2) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 5 & = & 5 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x-2}{5}\right) = +\infty.$

III.4 Comparaisons

Soient deux fonctions u et v définies dur I dont on connaît les limites en $+\infty$ et f une fonction.
On a le tableau suivant :

limite connue	comparaison, pour x assez grand	$\lim f(x)$
$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$	$f(x) \geq u(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$	$f(x) \leq u(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$	$f(x) - L \leq u(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$
$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = L$	$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$

Le dernier cas constituent le théorème des gendarmes.

Exemple 11

- Pour tout $x \in \mathbb{R}+^*$, $\dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$.
- Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{-1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = 0$.

III.5 Compatibilité avec l'ordre

Propriété 1
Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$, alors pour toute limite finie de f et g, on a :

$$\lim f(x) \leq \lim g(x).$$

On dit dans ce cas que l'inégalité $f(x) \leq g(x)$ passe à la limite.

III.6 Compositions

Propriété 2
Soient deux fonctions : f définie de I dans J et g de J dans $\mathbb{R}$.

$$\text{Si} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to b} g(x) = c \end{array}\right\} \quad \text{alors} \quad \lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = \lim\limits_{x\to a} g[f(x)] = c.$$

Exemple 12
Calcul de "composition" de limites :

- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to-\infty} (x+3) & = & -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} X^2 & = & +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to-\infty} (x+3)^2 = +\infty.$
- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{X} & = & 0^+ \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2x+1}\right) = 0^+.$
- $\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to0} (x+4) & = & 4 \\ \lim\limits_{X\to4} \sqrt{X} & = & 2 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to0} \sqrt{x+4} = 2.$

IV Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

Dans ces cas, toutes les situations sont *a priori* possibles : existence d'une limite finie, nulle ou non ; existence d'une limite infinie ; absence de limite.
Seule une étude particulière permet de lever l'indétermination.

Rappelons pour commencer les cas d'indétermination des limites :

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	Limite indéterminée	type d'indétermination
$+\infty$	$-\infty$	$f(x)+g(x)$	$\infty-\infty$
0	$\pm\infty$	$f(x)\times g(x)$	$0\times\infty$
0	0	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{0}{0}$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\infty}{\infty}$

IV.1 Cas des polynômes

Les indéterminations en $\pm\infty$ sont levées par une factorisation de la puissance de x maximale.

Exemple 13
Indétermination du type "$\infty-\infty$" :

- $\left.\begin{array}{lll}\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x & = & -\infty\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2-x)$ est une forme indéterminée du type $\infty-\infty$.
- On met x^2 en facteur : $f(x)=3x^2-x=x^2\left(3-\dfrac{1}{x}\right)$.
- $\left.\begin{array}{lll}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(3-\dfrac{1}{x}\right) & = & 1\end{array}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Remarque 6
De manière générale, le comportement d'une fonction polynomiale en $\pm\infty$ est dicté par le comportement de son terme de plus haut degré en $\pm\infty$.

IV.2 Cas des fractions de polynômes

Exemple 14
Indétermination du type $\dfrac{\infty}{\infty}$:

- $\left.\begin{array}{lll}\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+2x+1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (2x^2-3) & = & +\infty\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{2x^2-3}\right)$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$.
- Pour $x\neq 0$, on factorise par la puissance de x maximale et on simplifie :
$f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{2x^2-3}=\dfrac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{3}{x^2}\right)}=\dfrac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{2-\frac{3}{x^2}}$.
- $\left.\begin{array}{lll}\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right) & = & 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\frac{3}{x^2}\right) & = & 2\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$.

IV.3 Autres cas

Exemple 15
Indétermination du type "$0 \times \infty$" :

- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (x^2+1) & = & +\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\dfrac{1}{x}(x^2+1)\right]$ est une forme indéterminée du type $0 \times \infty$.
- On développe : $f(x) = \dfrac{1}{x}(x^2+1) = x + \dfrac{1}{x}$.
- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to-\infty} x & = & -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} & = & 0^- \end{array}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple 16
Indétermination du type "$\dfrac{0}{0}$" :

- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to 1} (x^2-1) & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to 1} (x-1) & = & 0 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)$ est une forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$.
- On factorise : $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$.
- $\lim\limits_{x\to 1} (x-1) = 0$ donc : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$.