Limites

Table des matières

I Langage des limites

I.1 Limite d'une fonction en un point a

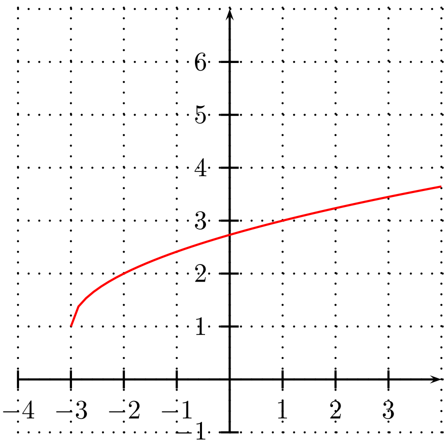
Définition 1
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel ou une borne de I.
Lorsque le réel x s'approche de a, si les nombres $f(x)$ deviennet de plus en plus

- *proches d'un réel l, on dit que f à pour limite l en a et on note* ....
- *grands, on dit que f a pour limite $+\infty$ en a et on note* ....
- *grands en valeur absolue et négatifs, on dit que f a pour limite $-\infty$ en a et on note* ....

Dans le cas où la limite en a vaut $\pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une .... *à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.*

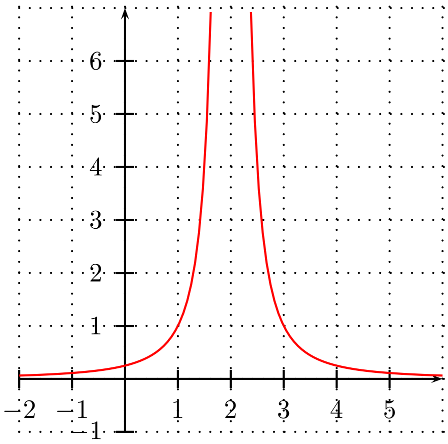
Exemple 1
"Visualisation" de limites en un point :

$f(x) = \sqrt{x+3} + 1$



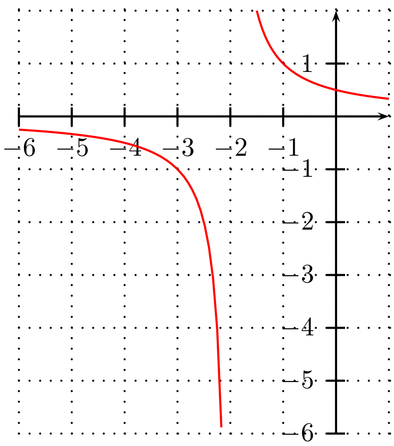
....
....

$f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$



....
....
....

$f(x) = \dfrac{1}{x+2}$



....
....
....

Remarque 1
Certaines fonctions n'admettent pas de limite en a.
Par exemple, la fonction $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ n'admet pas de limite en 0 :

- sur $\mathbb{R}^*_-$, ...

- sur $\mathbb{R}^*_+$, ...

I.2 Limite d'une fonction en l'infini

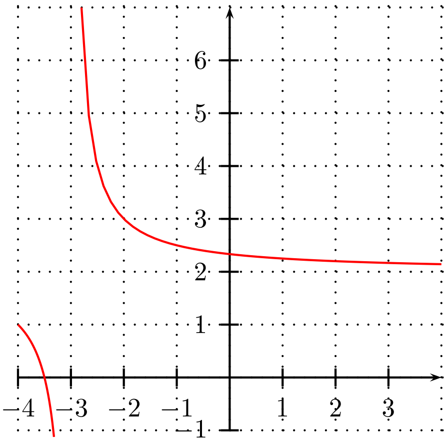
Définition 2
Soit f une fonction définie au moins sur $[a;+\infty[$. Lorsque le réel x prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus

- *proches d'un réel l, on dit que f a pour limite l en $+\infty$ et on note* ....
- *grands, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note* ....
- *grands en valeur absolue et négatifs, on dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note* ....

Dans le cas où la limite en $+\infty$ est l, on dit que la droite d'équation $y = l$ est une .... *à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.*

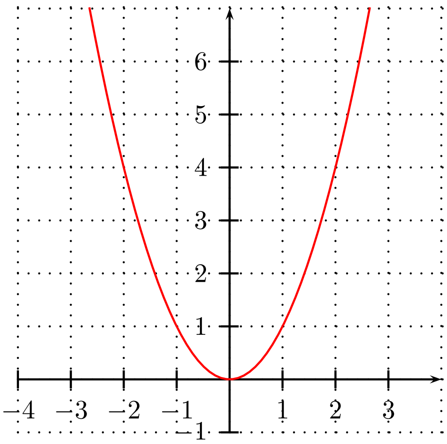
Exemple 2
"Visualisation" de limites en $+\infty$:

$f(x) = \dfrac{1}{x+3} + 2$



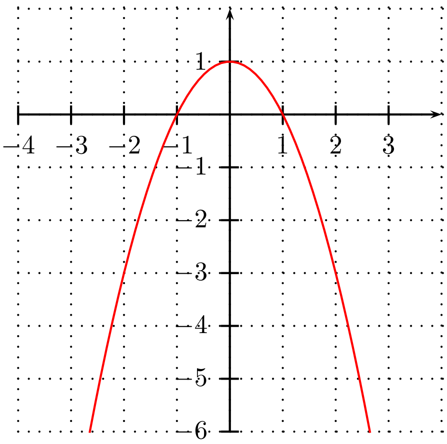
....
....
....

$f(x) = x^2$



....
....
....

$f(x) = 1 - x^2$



....
....
....

Remarque 2
Certaines fonctions n'admettent pas de limite en l'infini : par exemple les fonctions .... et ....

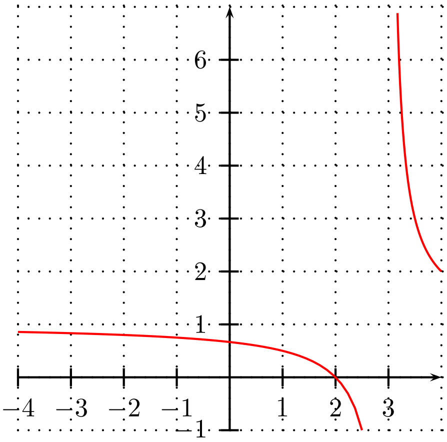
Définition 3
Soit f une fonction définie au moins sur $]-\infty;a]$. Lorsque le réel x prend des valeurs de plus en plus grandes en valeur absolue et négatives vers $-\infty$, si les nombres $f(x)$ deviennet de plus en plus

- *proches d'un réel l, on dit que f a pour limite l en $-\infty$ et on note* ....
- *grands, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note* ....
- *grands en valeur absolue et négatifs, on dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et on note* ....

Dans le cas où la limite en $-\infty$ est l, on dit que la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

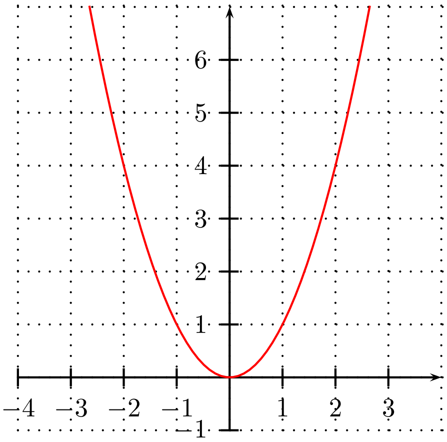
Exemple 3
"Visualisation" de limites en $-\infty$:

$f(x) = \dfrac{1}{x-3} + 1$



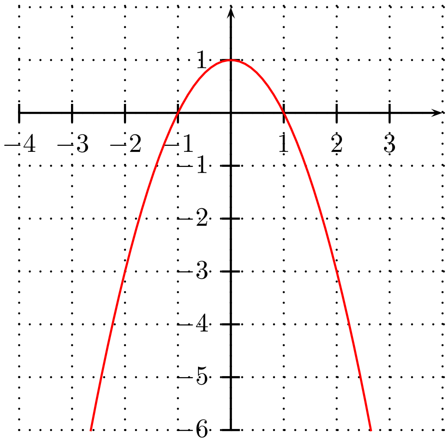
....
....
....

$f(x) = x^2$



....
....
....

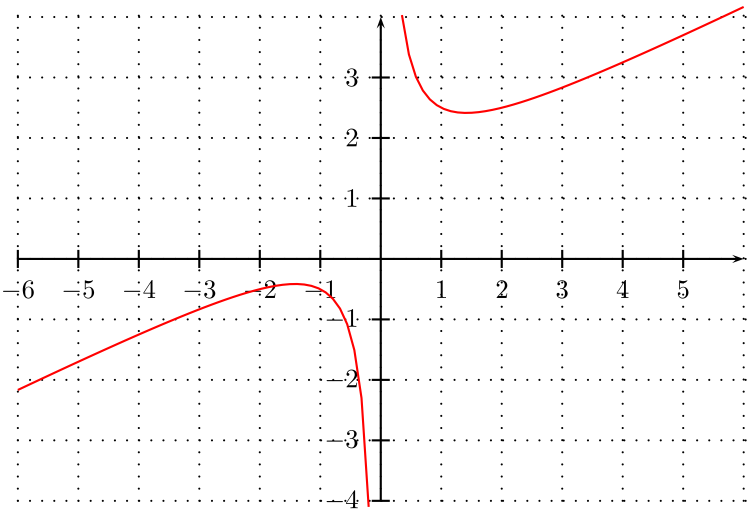
$f(x) = 1 - x^2$



....
....
....

Définition 4
Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$, on dit alors que la droite d'équation $y = ax + b$ est une .... *à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.*

Exemple 4
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x + 1$.



....
....
....

II Limites des fonctions usuelles

Voici un tableau qui résume les différentes limites des fonctions de référence :

$f(x)$ limite en	x	x^2	x^3	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x^3}$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$-\infty$										
0^-										
0^+										
$+\infty$										

III Opérations sur les limites

Dans tout ce qui suit, la notation "FI" désigne une Forme Indéterminée, c'est à dire qu'on ne sait pas calculer par une opération élémentaire.
La notation "$*$" signifie qu'il faut appliquer la "règle des signes".

III.1 Limite d'une somme

$\lim\ f$	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\ g$	l'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\ (f+g)$					

Exemple 5
Calcul de "sommes" de limites :

- $\lim\limits_{x\to 0} \left(x+x^3\right)$: ....

  ....

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{1}{x}+x^2\right)$: ....

  ....

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x+x^2\right)$: ....

  ....

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x+x^3\right.$: ....

  ....

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^2+x^3\right)$: ....

  ....

Remarque 3
Ces résultats englobent le cas de l'addition de constante, puisqu'on peut alors choisir une fonction f constante, dont la limite est partout cette constante.

Exemple 6
Addition d'une constante :

- $\left.\begin{array}{rcr} \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0+} 3 & = & 3 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0+} \left(\dfrac{1}{x}+3\right) = +\infty$
- La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

III.2 Limite d'un produit

$\lim\ f$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\ g$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\ (f \times g)$				

Exemple 7
Calcul de "produit" de limites :

- $\lim\limits_{x\to 0} [(x+3)\times(x-1)]$: ....

  ....

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[(x-3)\times\dfrac{1}{x}\right]$: ....

  ....

- $\lim\limits_{x\to -\infty} [(x-1)\times x^3]$: ....

  ....

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \left[(x^2+1)\times\dfrac{1}{x}\right]$: ....

  ....

Remarque 4
Ces résultats englobent le cas de la multiplication par une constante, puisqu'on peut alors choisir une fonction f constante, dont la limite est partout cette constante.

Exemple 8
Multiplication par une constante :

- $\left.\begin{array}{rcr} \lim\limits_{x\to +\infty} -2 & = & -2 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 & = & +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to +\infty} (-2x^2) = -\infty.$

III.3 Limite d'un quotient

$\lim\ f$	l	l	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\ g$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	l'	$\pm\infty$	0
$\lim\ \left(\dfrac{f}{g}\right)$						

Exemple 9
Calcul de "quotients" de limites :

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)$: ....

  ....

- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{x}-3}{x^2}\right)$: ....

  ....

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x-4}{x}\right)$: ....

  ....

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\frac{1}{x}-3}{x-1}\right)$: ....

  ....

- $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x-1}{x^3}\right)$: ....

  ....

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x}}\right)$: ....

  ....

Remarque 5
Ces résultats englobent le cas de la division par une constante, puisqu'on peut alors choisir une fonction f constante, dont la limite est partout cette constante.

Exemple 10
Division par une constante :

- $\left.\begin{array}{lcr} \lim\limits_{x\to +\infty} (x-2) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 5 & = & 5 \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x-2}{5}\right) = +\infty.$

III.4 Comparaisons

Soient deux fonctions u et v définies dur I dont on connaît les limites en $+\infty$ et f une fonction.
On a le tableau suivant :

limite connue	comparaison, pour x assez grand	$\lim f(x)$
$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$	$f(x) \geq u(x)$	
$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty$	$f(x) \leq u(x)$	
$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$	$f(x) - L \leq u(x)$	
$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = L$	$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$	

Le dernier cas constituent le théorème des gendarmes.

Exemple 11

- Pour tout $x \in \mathbb{R}+^*$, $\ldots\cdots \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq \ldots\ldots.$
- ....

  ....

III.5 Compatibilité avec l'ordre

Propriété 1
Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$, alors pour toute limite finie de f et g, on a :

....

On dit dans ce cas que l'inégalité $f(x) \leq g(x)$ passe à la limite.

III.6 Compositions

Propriété 2
Soient deux fonctions : f définie de I dans J et g de J dans $\mathbb{R}$.

Si $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to b} g(x) = c\end{array}\right\}$ alors ....

Exemple 12
Calcul de "composition" de limites :

- $\left.\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to-\infty} (x+3) & = & -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} X^2 & = & +\infty \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+3)^2 = +\infty.$
- $\left.\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to+\infty} (2x+1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{X} & = & 0^+ \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2x+1}\right) = 0^+.$
- $\left.\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to 0} (x+4) & = & 4 \\ \lim\limits_{X\to 4} \sqrt{X} & = & 2 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x+4} = 2.$

IV Calcul de limites dans les cas de formes indéterminées

Dans ces cas, toutes les situations sont *a priori* possibles : existence d'une limite finie, nulle ou non ; existence d'une limite infinie ; absence de limite.
Seule une étude particulière permet de lever l'indétermination.

Rappelons pour commencer les cas d'indétermination des limites :

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	Limite indéterminée	type d'indétermination

IV.1 Cas des polynômes

Les indéterminations en $\pm\infty$ sont levées par une factorisation de la puissance de x maximale.

Exemple 13
Indétermination du type "$\infty - \infty$" :

- $\left.\begin{array}{l} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2 - x)$ est une forme indéterminée du type ....
- On met x^2 en facteur : ....
- $\left.\begin{array}{l} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dots\dots\dots$

Remarque 6
De manière générale, le comportement d'une fonction polynomiale en $\pm\infty$ est dicté par le comportement de son terme de plus haut degré en $\pm\infty$.

IV.2 Cas des fractions de polynômes

Exemple 14
Indétermination du type $\dfrac{\infty}{\infty}$:

- $\left.\begin{array}{l}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x+1}{2x^2-3}\right)$ est une forme indéterminée du type ....
- Pour $x \neq 0$, on factorise par la puissance de x maximale et on simplifie :

  ....

- $\left.\begin{array}{l}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dots\dots\dots\dots$

IV.3 Autres cas

Exemple 15
Indétermination du type "$0\times\infty$" :

- $\left.\begin{array}{l}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}(x^2+1)\right]$ est une forme indéterminée du type ....
- On développe : $f(x) = \dfrac{1}{x}(x^2+1) = \dots\dots\dots\dots\dots$
- $\left.\begin{array}{l}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dots\dots\dots\dots\dots$

Exemple 16
Indétermination du type "$\dfrac{0}{0}$" :

- $\left.\begin{array}{l}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)$ est une forme indéterminée du type ....
- On factorise : $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
- ....