Fonction logarithme

Table des matières

Bref histoirique : On date en général la naissance des logarithmes népériens de 1647, date à laquelle Grégoire de Saint-Vincent travaille sur la quadrature de l'hyperbole et démontre que la fonction obtenue vérifie la propriété des fonctions logarithmes (transformation d'un produit en somme). La fonction ln s'est d'ailleurs appelée un certain temps fonction logarithme hyperbolique compte tenu de sa découverte comme aire sous l'hyperbole.

Le terme de logarithme naturel apparaît pour la première fois dans une note de Nicolaus Mercator en 1668, quand celui-ci met en place sa série de Mercator. Sa série exploitée par Newton, permet de calculer assez simplement les valeurs du logarithme de Grégoire de Saint-Vincent.

I Introduction du logarithme

I.1 Définition

Définition 1
La fonction logarithme népérien, notée ln, *est l'unique primitive de la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *définie sur* $]\,0\,;\,+\infty\,[$ *qui s'annule en* 1.

Conséquences directes :

- $\ln(1) = 0$,
- La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Remarque 1
Il existe différentes fonctions logarithmes ; dans ce chapitre, on étudie la fonction logarithme mise en évidence par l'Écossais J. NEPER, et qui porte son nom : le logarithme népérien.

Propriété 1
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et u une fonction strictement positive sur I, alors
la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est définie et existe sur I.

Exemple 1
Ensemble de définition I de la fonction définie par $f(x) = \ln(x+3)$:

- La fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est définie lorsque $u(x)$ est positif,
- on doit donc avoir : $x + 3 > 0 \Longleftrightarrow x > -3$.
- D'où : $\mathcal{D}_f =]-3\,;\,+\infty\,[$.

I.2 Relation fondamentale

Propriété 2
Soient a et b deux réels strictement positifs, on a la relation fondamentale suivante :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Démonstration :
Soit $b > 0$ fixé. Pour $x > 0$, on définit la fonction $f(x) = \ln(x.b)$.
Par dérivation, il vient $f'(x) = \dfrac{b}{x.b} = \dfrac{1}{x}$.
Puis par intégration : $f(x) = \ln(x) + K$.
En posant $x = 1$, on a $f(1) = \ln(1) + K = K$.
Or, $f(1) = \ln(1.b) = \ln(b)$, d'où $K = \ln(b)$.
Finalement : $\ln(x.b) = \ln(x) + \ln(b)$ et si on choisit $x = a$, on obtient le résultat voulu.

Propriété 3
Soient a et b deux réels strictement positifs et n est un entier naturel, alors :

- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$.
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.

En résumé, le logarithme népérien a la particularité de transformer les produits en sommes, les quotients en différences et les puissances en multiplications.

Démonstrations :

- On a $a \times \dfrac{1}{a} = 1$.
  Donc $\ln\left(a \times \dfrac{1}{a}\right) = \ln(1) = 0$
  $\iff \ln(a) + \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = 0$
  $\iff \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- On peut écrire $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- $\ln(a^n) = \ln(a \times a \times \ldots \times a) = \ln(a) + \ln(a) + \ldots + \ln(a) = n\ln(a)$.
- Lorsque a est un réel strictement positif, on a $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$.
  Donc $\ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(a)$
  $\iff \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = \ln(a)$
  $\iff \ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.

Remarque 2
La propiété fondamentale se généralise au cas d'un produit de trois, quatre, n facteurs :

$$\ln(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \cdots + \ln(a_n).$$

Exemple 2
Transformations d'expressions numériques (sur les intervalles où elles sont définies) :

- $\ln(24) = \ln(2^3 \times 3) = \ln(2^3) + \ln(3) = 3\ln(2) + \ln(3)$.
- $\ln\left(\dfrac{192}{108}\right) = \ln\left(\dfrac{16}{9}\right) = \ln(16) - \ln(9) = \ln(2^4) - \ln(3^2) = 4\ln(2) - 2\ln(3)$.
- $\ln(\sqrt{96}) = \dfrac{1}{2}\ln(96) = \dfrac{1}{2}\ln(2^5 \times 3) = \dfrac{1}{2}[5\ln(2) + \ln(3)]$.

Exemple 3
Transformations d'expressions algébriques (sur les intervalles où elles sont définies) :

- $\ln(x+3) + \ln(2x+1) = \ln[(x+3)(2x+1)] = \ln(2x^2 + 7x + 3)$.
- $\ln(3x) - \ln(3) + \ln(x^2) = \ln\left(\dfrac{3x \times x^2}{3}\right) = \ln(x^3) = 3\ln(x)$.
- $\ln(\sqrt{x-1}) = \dfrac{1}{2}\ln(x-1)$.

II Etude de la fonction logarithme

II.1 Limite aux bornes

Propriété 4
On a les limites importantes suivantes :

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Conséquence : La droite $x = 0$ est donc asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction ln.

Exemple 4
Limite en $+\infty$ de $\ln(x-1)$:

- La fonction est définie lorsque $x - 1 > 0$, donc sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$.
- $\left.\begin{array}{lcl} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x-1) & = & +\infty \\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty} \ln(X) & = & +\infty \end{array}\right\}$ par composition : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x-1) = +\infty$.

Limite en -3 de $\ln(x+3)$:

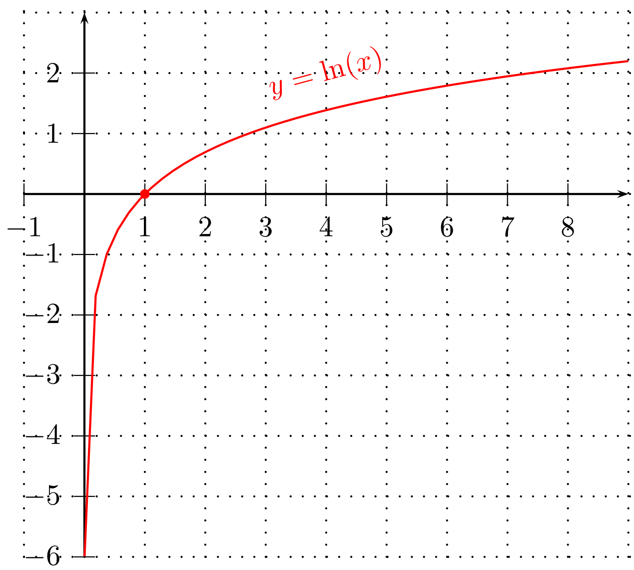
- La fonction est définie lorsque $x + 3 > 0$, donc sur $]-3\,;\,+\infty\,[$.
- $\left.\begin{array}{lcl} \displaystyle\lim_{x\to-3^+} (x+3) & = & 0^+ \\ \displaystyle\lim_{X\to 0^+} \ln(X) & = & -\infty \end{array}\right\}$ par composition : $\displaystyle\lim_{x\to-3^+} \ln(x+3) = -\infty$.

II.2 Variations

Sachant que la dérivée de la fonction logarithme est $\dfrac{1}{x}$ et qu'elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, la dérivée est positive, et la fonction est donc croissante sur cet intervalle.

D'où le tableau de variations et la courbe :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
signe	$-$	0	$+$



II.3 Fonction $\ln(u)$

Propriété 5
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et u une fonction strictement positive et dérivable sur I, alors la fonction $x \mapsto \ln[u(x)]$ est dérivable sur I de dérivée $\ln[u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple 5
Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2+1)$.

- Le polynôme u défini par $u(x) = x^2+1$ est strictement positif et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $u'(x) = 2x$.
- Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \ln(x-2)$.

- Le polynôme v défini par $v(x) = x-2$ est strictement positif et dérivable sur $]\,2\,;+\infty\,[$ de dérivée $v'(x) = 1$.
- Donc, g est dérivable sur $]\,2\,;+\infty\,[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

Ceci nous conduit à un résultat important pour la recherche de primitives :

Propriété 6
Soit u une fonction définie et dérivable sur I.

- Si u est strictement positive sur I, alors les primitives de $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont de la forme $\ln[u(x)] + K$.
- Si u est strictement négative sur I, alors les primitives de $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont de la forme $\ln[-u(x)] + K$.

où K est une constante réelle.

Exemple 6
Détermination de la primitive F de f,fonction définie sur $I = \left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2}{2x-1}$.

- Le polynôme u défini par $u(x) = 2x-1$ est strictement positif et dérivable sur I de dérivée $u'(x) = 2$.
- Donc, f est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec u stictement positive de primitive $\ln(u) + K$.
- $F(x) = \ln(2x-1) + K$ sur I.

Détermination de la primitive G de g, fonction définie sur $J = \left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right[$ par $g(x) = \dfrac{2}{2x-1}$.

- Le polynôme v défini par $v(x) = 2x-1$ est strictement négatif et dérivable sur J de dérivée $v'(x) = 2$.
- Donc, g est de la forme $\dfrac{v'}{v}$ avec v stictement négative de primitive $\ln(-v) + L$.
- $G(x) = \ln(-2x+1) + L$ sur J.

Conlusion :
La fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ par $h(x) = \dfrac{2}{2x-1}$ admet donc des primitives distinctes selon l'intervalle dans lequel on se trouve.

II.4 Croissance comparée du logarithme népérien et des fonctions puissance

Propriété 7
On a les limites classiques suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$.
- $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$.
- $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0$.

Remarque 3
On dit que "le x l'emporte sur le logarithme".

III Equations et inéquations

III.1 Nombre e

D'après le tableau de variation de la fonction ln, on en déduit que l'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution dans $]\,0\,;\,+\infty\,[$. Ce réel est noté e et vaut environ $2,718$.

On a donc deux valeurs importants à connaitre pour le logarithme :

$$\boxed{\ln(1) = 0} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\ln(e) = 1}$$

Remarque 4
Ce "e" $= e^1 = \exp(1)$ vient de la fonction exponentielle qui est au programme de terminale.

Exemple 7
Simplification d'expressions contenant e :

- $\ln(e^2) = 2\ln(e) = 2$.
- $\ln(e^4) = 4\ln(e) = 4$.
- $\ln(e^{-1}) = -\ln(e) = -1$.
- $\ln(e^{-5}) = -5\ln(e) = -5$.

Remarque 5
On remarque que pour tout réel a, $\ln(e^a) = a$.

III.2 Résolution d'équations

Propriété 8
Pour tout $u > 0$, on a les résultats suivants :

- Pour tout $v > 0$, l'équation $\ln(u) = \ln(v)$ possède comme unique solution $u = v$.
- Pour tout λ, l'équation $\ln(u) = \lambda$ possède comme unique solution le nombre $u = e^{\lambda}$.

Exemple 8
Résolution dans $\mathbb{R}_*^+$ de l'équation $\ln(x) = 4$:

- $\ln(x) = 4 \iff \ln(x) = 4 \times 1 \iff \ln(x) = 4\ln(e) \iff \ln(x) = \ln(e^4) \iff x = e^4$.

Résolution dans $\mathbb{R}_*^+$ de l'équation $2\ln(x) - \ln(x^3) = -5$:

- $$2\ln(x) - \ln(x^3) = -5 \iff \ln(x^2) - \ln(x^3) = \ln(e^{-5}) \iff \ln\left(\frac{x^2}{x^3}\right) = \ln(e^{-5})$$
$$\iff \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(e^{-5}) \iff \frac{1}{x} = e^{-5} \iff x = e^5.$$

Résolution dans $]-3\,;3\,[$ de l'équation $\ln(-x^2+9) = 0$.

- $\ln(-x^2+9) = 0 \iff \ln(-x^2+9) = \ln(1) \iff -x^2+9 = 1 \iff x^2 = 8 \iff x = -2\sqrt{2}$ ou $x = 2\sqrt{2}$.
- Ces deux possibilités sont solutions car elles appartiennet toutes les deux à l'intervalle de définition.

III.3 Resolution d'inéquations

Propriété 9
Pour tout $u > 0$ et $v > 0$, on a les résultats suivants :

- $\ln(u) < 0$ équivaut à $0 < u < 1$.
- $\ln(u) > 0$ équivaut à $u > 1$.
- $\ln(u) < \ln(v)$ équivaut à $u < v$.

Exemple 9
Résolution de l'équation $\ln(x^2-4) < \ln(3x)$:

- on cherche les nombres x tels que $x^2 - 4 > 0$ et $3x > 0$:
- $x^2 - 4 > 0$ lorsque $x < -2$ ou $x > 2$ et $3x > 0$ lorsque $x > 0$.
- L'équation sera donc résolue pour $x > 2$.
- $\ln(x^2-4) < \ln(3x) \iff x^2 - 4 < 3x \iff x^2 - 3x\breve{}4 > 0$
- On trouve $\Delta = 25$ et les solutions sont $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$.
- Le trinôme est du signe de $a = 1$, donc positif saus entre ses racines -1 et 4 donc :
- $\mathcal{S} =]4; +\infty[$.

IV logarithme décimal

Cette fonction se note log. Elle est définie sur $]\,0\,; +\infty\,[$ par la relation $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Ses propriétés sont en gros identiques à celles de la fonction ln.

La relation fondamentale, qui explique son succès en Sciences est la suivante : Pour tout $x > 0$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\log(x) = y \iff x = 10^y$ ou encore $\log(10^y) = y$.

Exemple 10
Simplification de logarithmes décimaux.

- $\log(10) = 1$
- $\log(100) = \log(10^2) = 2$
- $\log(0,1) = \log\left(\frac{1}{10}\right) = -\log(10) = -1$

Le développement des calculatrices ont fait perdre aux logarithmes leur principal intérêt de simplifications des calculs. Ils restent cependant très présents en physique quand il s'agit d'appréhender des quantités pouvant varier de 10^{-10} à 10^{10}. C'est ainsi qu'on les retrouve dans le calcul des pH, des décibels, ...

EXERCICE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x).$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

1. Calculer la limite de f en $+\infty$.
2. (a) En remarquant que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$: $f(x) = \dfrac{1}{1+x}[2x-(1+x)\ln(1+x)]$, calculer la limite de f en -1 (on pourra utiliser sans démonstration $\lim_{X\to 0} X\ln X = 0$).
   (b) En déduire une équation d'une droite $\mathcal{D}$ asymptote à $\mathcal{C}$.
3. Déterminer la dérivée f' de f et montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1-x}{(1+x)^2}$.
4. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.
   (b) Calculer la valeur exacte de $f(1)$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.

Partie B

1. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
2. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution α dans l'intervalle $[1\ ;\ 5]$.
   Démontrer que $\ln(1+\alpha) = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha}$.
   (b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[O\ ;\ \alpha]$.
4. Tracer, dans le repère, la tangente $\mathcal{T}$, la droite $\mathcal{D}$ puis la courbe $\mathcal{C}$.

Partie C

1. Démontrer que, sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, la fonction F définie par
   $$F(x) = (-3-x)\ln(1+x) + 3x$$
   est une primitive de la fonction f.
2. Soit $\mathcal{H}$ la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.
   (a) Hachurer la partie $\mathcal{H}$ sur le dessin.
   (b) Calculer, en unités d'aire et en fonction de α, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie $\mathcal{H}$ et démontrer que $\mathcal{A}(\alpha) = 2\left(\dfrac{\alpha^2-3\alpha}{1+\alpha}\right)$ cm^2.