Fonction exponentielle

Table des matières

Bref historique : Le professeur Carl B. Boyer, indique qu'Archimède a exprimé de grands nombres en utilisant une formulation qui s'apparente à une exponentielle dans son traité sur les grains de sables (Psammites). Apollonius de Perga s'est aussi approché des exponentielles, en s'intéressant aux grands nombres avec l'usage de ses "tetrades".

Au Moyen Age, Thomas Brawardine, a fait un pas en direction de l'étude des fonctions transcendantales. Nicole Oresme l'a suivi en généralisant sa théorie des proportions. Il a aussi étudié, entre autres choses, la fonction x à la puissance racine de deux.

I Introduction de l'exponentielle

I.1 Définition

Définition 1
La fonction exponentielle, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\exp(x) = e^x$, e^x étant l'unique nombre réel positif dont le logarithme vaut x

Remarque 1
On dit que la fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme, ce qui signifie que graphiquement, les courbes sont symétriques par rapport à la première bissectice ($y = x$).

Conséquences directes :

- $\exp(x) > 0$.
- $\exp(1) = e^1 = e \approx 2,718$.
- $\ln(e^x) = x$.
- $e^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y > 0$: $y = e^x \iff \ln(y) = x$.

Propriété 1
Soit u une fonction continue et définie sur I, alors la fonction $x \mapsto \exp[u(x)]$ est définie et existe sur I.

Exemple 1
Ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction définie par $f(x) = e^{x+3}$:

- La focntion $x \mapsto x + 3$ est définie, continue sur $\mathbb{R}$.
- D'où : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

I.2 Relation fondamentale

Propriété 2
Pour tous réels a et b, on a la relation fondamentale suivante :

$$\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b) \qquad \text{ou encore} \qquad e^{a+b} = e^a \times e^b.$$

Démonstration :
Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a $\ln(e^{x+y}) = x + y = \ln(e^x) + \ln(e^y) = \ln(e^x \times e^y)$.
En appliquant l'exponentielle de chaque côté, il vient :
$e^{\ln(e^{x+y})} = e^{\ln(e^x \times e^y)} \iff e^{x+y} = e^x \times e^y$.

Propriété 3
Soient a et b deux réels et n est un entier relatif, alors :

- $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$.
- $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.
- $(e^a)^n = e^{an}$.

En résumé, l'exponentielle a la particularité de transformer les sommes en produits, les différences en quotients et les multiplications en puissances. (inversement au logarithme !).

Remarque 2
La propiété fondamentale se généralise au cas d'un produit de trois, quatre, n facteurs :

$$\exp(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \exp(a_1) \times \exp(a_2) \times \cdots \times \exp(a_n).$$

Exemple 2
Transformations d'expressions numériques :

- $e^2 \times e^3 = e^6$.
- $\dfrac{1}{e^5} = e^{-5}$.
- $\dfrac{e^7}{e^2} = e^5$.
- $(e^{-2})^{-3} = e^6$.

Exemple 3
Transformations d'expressions algébriques :

- $e^{x+3} \times e^{2x+1} = e^{(x+3)+(2x+1)} = e^{3x+4}$.
- $\dfrac{e^{3x-2} \times e^{-4x+2}}{e^{x^2}} = e^{(3x-2)+(-4x+2)-(x^2)} = e^{-x-x^2}$.
- $(e^{x-2})^2 = e^{2x-4}$.

II Etude de la fonction exponentielle

II.1 Limite aux bornes

Propriété 4
On a les limites importantes suivantes :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Conséquence : La droite $y = 0$ est donc asymptote orizontale à la courbe représentative de la fonction exp.

Exemple 4
Limite en $+\infty$ de e^{x-1} :

➜ $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) & = & +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} e^X & = & +\infty\end{array}\right\}$ par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-1} = +\infty$.

Limite en $-\infty$ de e^{x+3} :

➜ $\left.\begin{array}{lcl}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3) & = & -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^X & = & 0\end{array}\right\}$ par composition : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x+3} = 0$.

II.2 Variations

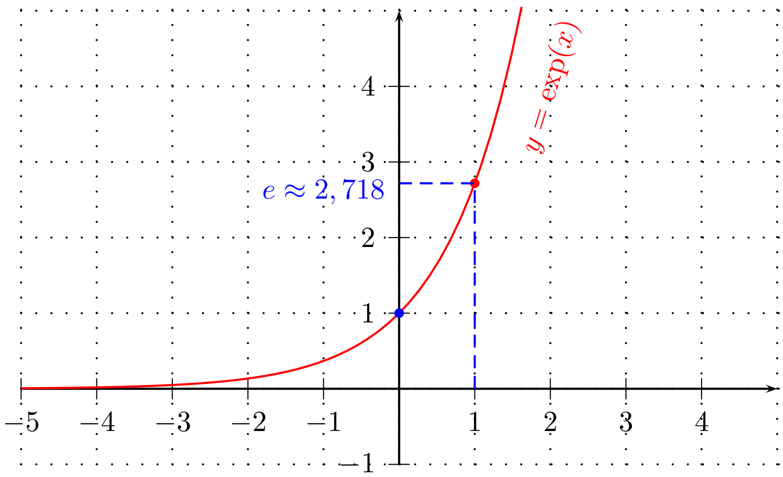
Propriété 5
La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $(e^x)' = e^x$.

Démonstration :
Ce point est une conséquence de la dérivation des fonctions composées :
On dérive la relation $\ln e^x = x$: $\dfrac{(e^x)'}{e^x} = 1$ d'où $(e^x)' = e^x$.

Sachant que la dérivée de la fonction exponentielle est e^x et qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$, la dérivée est strctement positive, et la fonction est donc strictement croissante sur cet intervalle.

D'où le tableau de variations et la courbe :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$
signe		$+$	



II.3 Fonction $\exp(u)$

Propriété 6
Soit u une fonction définie dérivable sur I, alors la fonction $x \to \exp[u(x)]$ est dérivable sur I de dérivée

$$\exp[u(x)]' = u'(x)\exp[u(x)].$$

On écrit aussi : $(e^u)' = u'e^u$.

Exemple 5
Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{x^2+1}$.

- Le polynôme u défini par $u(x) = x^2 + 1$ est défini et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $u'(x) = 2x$.
- Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x\, e^{x^2+1}$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{x-2}$.

- Le polynôme v défini par $v(x) = x - 2$ est défini et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $v'(x) = 1$.
- Donc, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = g(x) = e^{x-2}$.

II.4 Croissance comparée de l'exponentielle et des fonctions puissance

Propriété 7
On a les limites classiques suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x\, e^x = 0$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\, e^x = 0$.

Remarque 3
On dit que "l'exponentielle l'emporte sur la puissance".

L'idée à retenir : Au voisinage de $+\infty$, les fonctions $x \to \ln x$, $x \to x^\alpha$ et $x \to e^x$ prennent des valeurs qui se classent dans cet ordre de la plus petite à la plus grande.

III Résolution d'équations

Propriété 8
Pour tout u et v, on a les résultats suivants :

- L'équation $\exp(u) = \exp(v)$ possède comme unique solution $u = v$.
- Pour tout $\lambda > 0$, l'équation $\exp(u) = \lambda$ possède comme unique solution le nombre $u = \ln(\lambda)$.

Exemple 6
Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^x = 4$:

- $e^x = 4 \iff \ln(e^x)) = \ln(4) \iff x = \ln 4$.

Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $2e^x \times e(^3x) = 5$:

- $2e^x \times e^{3x} = 5 \iff 2e^{x+3x} = 5 \iff e^{4x} = \dfrac{5}{2} \iff 4x = \ln\left(\dfrac{5}{2}\right) \iff x = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\exp(-x^2 + 9) = 1$.

- $\exp(-x^2 + 9) = 1 \iff \ln[\exp(-x^2 + 9)] = \ln(1) \iff -x^2 + 9 = 0 \iff x^2 = 9 \iff x = -3$, ou $x = 3$.

IV Exerçice de bac

EXERCICE

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \ln x + \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

L'objet de cette première partie est l'étude des limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. (a) Montrer que pour tout nombre réel strictement positif x, $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}(x\ln x + 1)$.
   On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$. En déduire la limite de f en 0.
   (b) Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote $\mathcal{D}$ dont on donnera une équation.

Partie B : étude d'une fonction intermédiaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par

$$g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

1. (a) On désigne par g' la dérivée de la fonction g.
   Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x, $g'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$.
   (b) Étudier le signe de $g'(x)$. En déduire que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$. L'étude des limites n'est pas demandée.
2. (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]$.
   (b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. Déduire des questions B_1 et B_2 le signe de $g(x)$, pour x appartenant à l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

Partie C : étude des variations de la fonction f et construction de la courbe associée

1. (a) f' désignant la dérivée de f, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \mathrm{e}^x g(x)$, pour tout nombre x appartenant àl'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$.
   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$.
2. (a) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   (b) Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de $f(\alpha)$, en prenant $0,6$ pour valeur approchée de α.
3. (a) Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

x	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5
$f(x)$ à 10^{-1} près										

   (b) Construire l'asymptote $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$ pour x appartenant à l'intervalle $]\,0\,;\,2,5\,]$.

Partie D : calcul d'aire

1. Montrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par $F(x) = \mathrm{e}^x \ln x$ est une primitive de f.
2. On désire calculer l'aire de la partie $\mathcal{E}$ du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.
   (a) Hachurer la partie $\mathcal{E}$ sur le dessin.
   (b) Déterminer la valeur exacte de l'aire de $\mathcal{E}$ en unités d'aires, puis en cm^2.