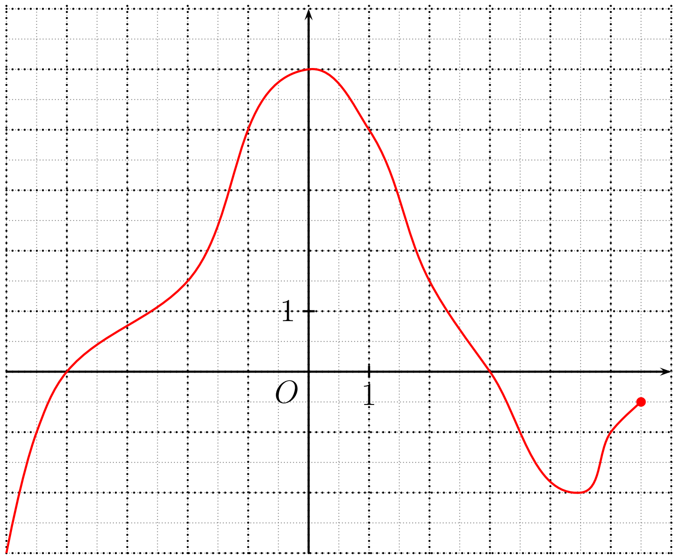
Devoir Surveillé n°1

EXERCICE n° 1

Le graphique ci-contre représente une fonction f.



1. Sur quel intervalle f est-elle définie ?
2. Quelles sont les images de -2 et de 0 par f ?
3. Lire $f(3)$.
4. Résoudre graphiquement $f(x) = 4$.
5. Quels sont les antécédents de $\frac{3}{2}$ par f ?
6. Dresser le tableau de signes de $f(x)$.
7. Dresser le tableau de variations de f.
8. Résoudre l'équation : $f(x) \leqslant -1$.
9. Résoudre l'inéquation : $f(x) > 0$.

EXERCICE n° 2

Résoudre dans l'intervalle $[\ 0\ ;\ 2\pi\ ]$ les équations suivantes :

1. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (représenter graphiquement les solutions).
2. $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ (représenter graphiquement les solutions).
3. $\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

EXERCICE n° 3

Soit $P(x)$ le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

1. (a) Vérifier que 1 est une racine du polynôme $P(x)$.

   (b) Pourquoi peut-on en déduire que $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$?

   (c) Déterminer les réels a, b et c

   (d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

2. En utilisant les résultats de la question 1.(d) :

   (a) Résoudre dans $[\ 0\ ;\ 2\pi\ ]$ l'équation $2(\sin x)^3 + 3(\sin x)^2 - 8\sin x + 3 = 0$.

   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x^6 + 3x^4 - 8x^2 + 3 = 0$.

Correction de l'interrogation n°1

EXERCICE n° 1

1. $\mathcal{D}_f =]-\infty\ ;\ 5,5\ ]$.

2. $f(-2) = 1,5$ et $f(0) = 5$.

3. $f(3) = 0$.

4. $\mathcal{S} = \{-1; 1\}$.

5. Les antécédents de $\dfrac{3}{2}$ par f sont -2 et 2.

6. tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		3		$5,5$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

7. tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$4,5$		$5,5$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$-0,5$

8. $\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ 5,5\ ] \cup [\ 3,5\ ;\ 5\ ]$

9. $\mathcal{S} =]-4; 3[$

EXERCICE n° 2

1. $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right\}$

2. $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

3. $$\begin{aligned}
\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &\iff \left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \left(x + \frac{\pi}{2}\right) + k \times 2\pi \quad \text{ou} \quad \left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + k \times 2\pi \\
&\iff 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi \quad \text{ou} \quad 4x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} + k \times 2\pi \\
&\iff 2x = \frac{2\pi}{3} + k \times 2\pi \quad \text{ou} \quad 4x = -\frac{\pi}{3} + k \times 2\pi \\
&\iff x = \frac{\pi}{3} + k \times \pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{12} + k \times \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

dans l'intervalle $[0; 2\pi]$, on trouve les solutions suivantes :

$x = \dfrac{\pi}{3}$, $x = \dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{4\pi}{3}$, $x = -\dfrac{\pi}{12} + 1 \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{5\pi}{12}$, $x = -\dfrac{\pi}{12} + 2 \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{11\pi}{12}$, $x = -\dfrac{\pi}{12} + 3 \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{17\pi}{12}$ et $x = -\dfrac{\pi}{12} + 4 \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{23\pi}{12}$

$\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{12}; \dfrac{11\pi}{12}; \dfrac{4\pi}{3}; \dfrac{17\pi}{12}; \dfrac{23\pi}{12}\right\}$

EXERCICE n° 3

1. (a) $\boxed{P(1)=0}$.

   (b) 1 est racine, on peut donc factoriser P par $(x-1)$.

   On obtient $P(x)=(x-1)R(x)$ avec $deg(R)=3-1=2$ d'où $R(x)=ax^2+bx+c$.

   (c) $$\begin{aligned}P(x)&=(x-1)(ax^2+bx+c)\\&=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c\\&=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c\end{aligned}$$

   Par identification des coefficients, on obtient :

   $$\begin{cases}a=2\\b-a=3\\c-b=-8\\-c=3\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}a=2\\b=5\\c=-3\end{cases}$$

   (d) $P(x)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (x-1)(2x^2+5x-3)=0.$

   Un produit de facteurs est nul ssi l'un des facteurs est nul, soit :

   - $x-1=0$ donc $x=1$,
   - $2x^2+5x-3=0$: $\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times2\times-3=49.$

     Le discriminant est positif, il y a deux solutions réelles :

   $$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-7}{2\times2}=-3 \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+7}{2\times2}=\frac{1}{2}$$

   Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{-3;\frac{1}{2};1\right\}}$.

2. (a) Si on pose $X=\sin x$ dans $2(\sin x)^3+3(\sin x)^2-8\sin x+3=0$, on obtient $2x^3+3x^2-8x+3=0$.

   Or, les solutions de cette dernière équation sont

   - $X=-3$ soit $\sin x=-3$: impossible,
   - $X=\frac{1}{2}$ soit $\sin x=\frac{1}{2}$ donc $x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=\frac{5\pi}{6}$,
   - $X=1$ soit $\sin x=1$ donc $x=\frac{\pi}{2}$.

   Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right\}}$.

   (b) Si on pose $X=x^2$ dans $2x^6+x^4-13x^2+6=0$, on obtient $2X^3+X^2-13X+6=0$.

   Or, les solutions de cette dernière équation sont

   - $X=-3$ soit $x^2=-3$: impossible,
   - $X=\frac{1}{2}$ soit $x^2=\frac{1}{2}$ donc $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,
   - $X=1$ soit $x^2=1$ donc $x=1$ ou $x=-1$,

   Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{-1;-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};1\right\}}$.