Devoir Surveillé n°2

EXERCICE n° 1
Une urne contient six billets numérotés de 1 à 6.
On tire au hasard deux billets successivement et sans remise. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Chaque tirage peut être modélisé par un couple $(a\ ;\ b)$ de deux nombres distincts. Par exemple le tirage du billet numéroté 3 suivi du billet numéroté 5 sera noté $(3\ ;\ 5)$.
   (a) A l'aide d'un arbre ou d'un tableau, justifier qu'il y a 30 couples possibles.
   (b) Soit A l'évènement : « les deux numéros tirés sont pairs ». Vérifier que la probabilité de A est égale à $\frac{1}{5}$.
   (c) Calculer la probabilité de l'évènement B : « au moins l'un des numéros est impair ».
2. Soit D la variable aléatoire, qui à chaque tirage associe la différence entre le plus grand et le plus petit des deux nombres du couple. Ainsi au couple $(3\ ;\ 5)$ comme au couple $(5\ ;\ 3)$ la variable aléatoire D associe le réel $5 - 3 = 2$.
   (a) Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire D ?
   (b) Calculer les probabilités $P(D = 1)$ et $P(D = 3)$.
   (c) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire D.
   (d) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire D.

EXERCICE n° 2
Une entreprise fabrique des appareils susceptibles de présenter deux types de pannes « a » ou « b ». On admettra que 5 % des appareils sont concernés par la panne « a », 3 % par la panne « b » et 1 % par les deux. On prélève au hasard un appareil dans la production. On note A l'évènement : l'appareil présente la panne « a » et B l'évènement : l'appareil présente la panne « b ».

I. Première partie

1. Montrer que la probabilité pour cet appareil de présenter la panne « a » ou la panne « b » est $0,07$.
2. Quelle est la probabilité pour cet appareil de présenter la panne « a » et pas la panne « b » ?
3. Quelle est la probabilité pour cet appareil de ne présenter aucune des deux pannes ?

II. Deuxième partie
L'entreprise fabrique un grand nombre d'appareils par semaine. Chaque appareil a un coût de fabrication de 200 euros. La réparation d'une panne « a » coûte 60 euros à l'entreprise, la réparation d'une panne « b » coûte 40 euros et la réparation des deux pannes coûte 100 euros.
On considère la variable aléatoire X qui, à chaque appareil, associe son prix de revient total (coût de fabrication et coût de la réparation éventuelle).

1. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X.
4. Que représente $E(X)$ pour l'entreprise ?

EXERCICE n° 3
Un sac contient des boules indiscernables au toucher : 1 boule rouge, 3 boules jaunes et n boules noires. (n désigne un entier naturel strictement positif). Un club sportif organise un jeu consistant, pour chaque joueur, à prélever dans le sac une boule au hasard. Si la boule tirée est rouge, le joueur reçoit 5 euros, si la boule est jaune, il reçoit 2 euros et si la boule est noire, il reçoit 1 euro. Pour participer au jeu, le joueur doit acheter un billet d'entrée coûtant $1,70$ euros.
On note X_n la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée dans le sac, associe le gain algébrique du joueur c'est à dire la somme reçue diminuée du prix du billet.

1. Dans cette question seulement, on suppose $n = 6$.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X_6 ?
   (b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_6.
   (c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_6.

   Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que l'entier naturel n est quelconque.
2. Étude de la variable aléatoire X_n.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n.
   (b) Déterminer en fonction de n l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_n.
   (c) Le club souhaite que l'espérance de X_n soit strictement négative. Quel doit être le nombre minimal de boules noires contenues dans le sac pour que cette condition soit remplie ?

Correction du devoir surveillé n°2

EXERCICE n° 1

1. (a) arbre de probabilité :

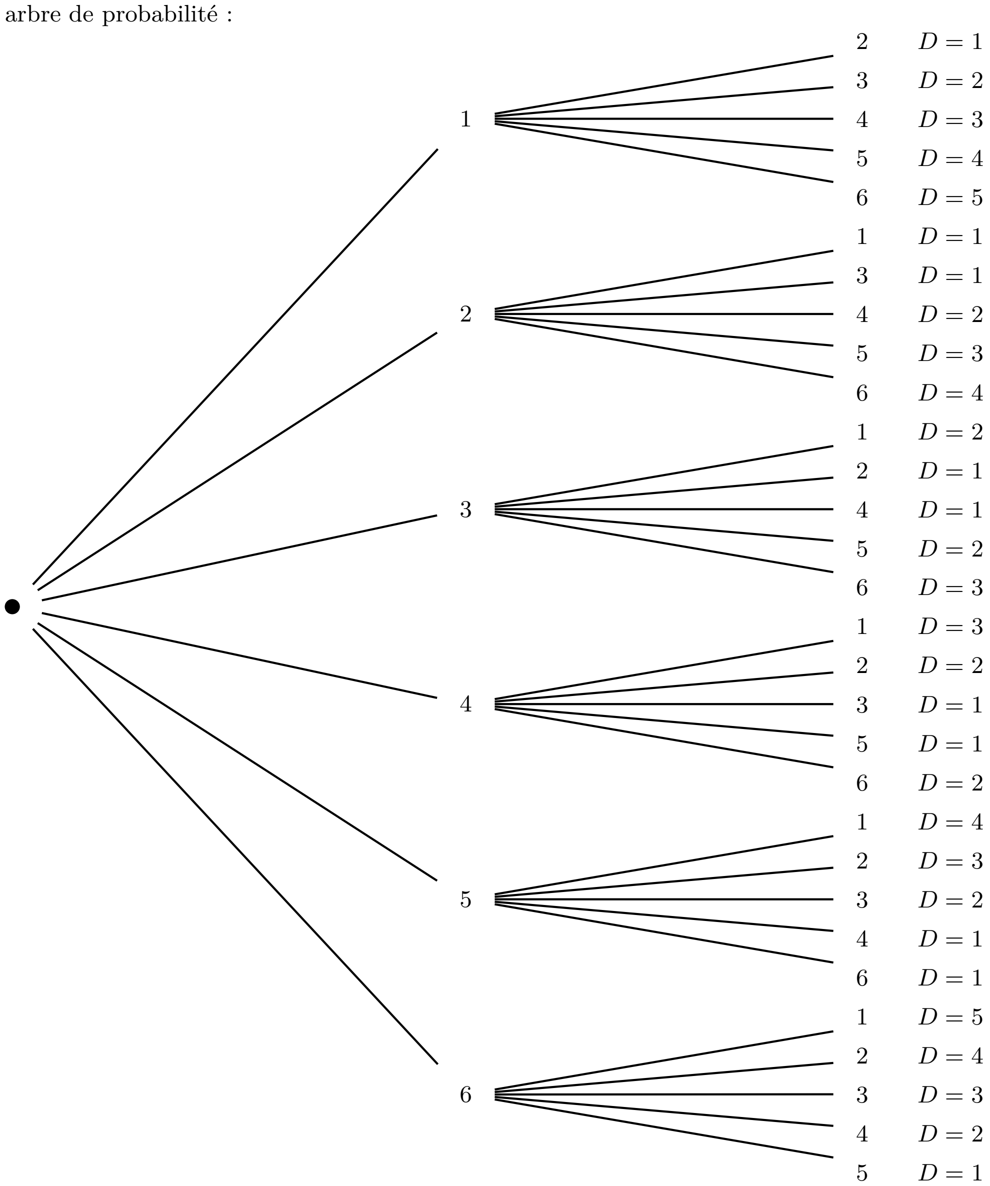

Tableau :

	1	2	3	4	5	6
1		$(1;2)$ $D = 1$	$(1;3)$ $D = 2$	$(1;4)$ $D = 3$	$(1;5)$ $D = 4$	$(1;6)$ $D = 5$
2	$(2;1)$ $D = 1$		$(2;3)$ $D = 1$	$(2;4)$ $D = 2$	$(2;5)$ $D = 3$	$(2;6)$ $D = 4$
3	$(3;1)$ $D = 2$	$(3;2)$ $D = 1$		$(3;4)$ $D = 1$	$(3;5)$ $D = 2$	$(3;6)$ $D = 3$
4	$(4,1)$ $D = 3$	$(4;2)$ $D = 2$	$(4;3)$ $D = 1$		$(4;5)$ $D = 1$	$(4;6)$ $D = 2$
5	$(5,1)$ $D = 4$	$(5;2)$ $D = 3$	$(5;3)$ $D = 2$	$(5;4)$ $D = 1$		$(5;6)$ $D = 1$
6	$(6,1)$ $D = 5$	$(6;2)$ $D = 4$	$(6;3)$ $D = 3$	$(6;4)$ $D = 2$	$(6;5)$ $D = 1$	

Il y a donc bien $6 \times 5 = 30$ couples possibles.

(b) $P(A) = \dfrac{6}{30} = \dfrac{1}{5}$.

(c) $B = \overline{A}$ donc : $P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$.

2. (a) D peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 4 et 5.

(b) $P(D = 1) = \dfrac{10}{30} = \dfrac{1}{3}$ et $P(D = 3) = \dfrac{6}{30} = \dfrac{1}{5}$.

(c) Loi de probabilité de la variable aléatoire D :

d_i	1	2	3	4	5
$P(D = d_i)$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{4}{15}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{1}{15}$

(d) $E(D) = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} d_i P(D = d_i) = 1 \times \dfrac{1}{3} + 2 \times \dfrac{4}{15} + 3 \times \dfrac{1}{5} + 4 \times \dfrac{2}{15} + 5 \times \dfrac{1}{15} = \dfrac{7}{3}$.

$V(D) = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} d_i^2 P(D = d_i) - E^2(x) = 1^2 \times \dfrac{1}{3} + 2^2 \times \dfrac{4}{15} + 3^2 \times \dfrac{1}{5} + 4^2 \times \dfrac{2}{15} + 5^2 \times \dfrac{1}{15} - \left(\dfrac{7}{3}\right)^2 = \dfrac{14}{9}$.

EXERCICE n° 2

I. Première partie

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,05 + 0,03 - 0,01 = 0,07$.
2. $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,05 - 0,01 = 0,04$.
3. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,07 = 0,93$.

II. Deuxiéme partie

1. X peut prendre les valeurs 200, 240, 260 et 300.
2. Loi de probabilité de la variable aléatoire X :

x_i	200	240	260	300
$P(X = x_i)$	$0,93$	$0,02$	$0,04$	$0,01$

3. $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i P(X = x_i) = 200 \times 0,93 + 240 \times 0,02 + 260 \times 0.04 + 300 \times 0,01 = 204,2$.
4. Ce nombre signifie que le coût moyen de fabrication d'un appareil est de $204,20$ euros.

EXERCICE n° 3

1. (a) X_6 peut prendre les valeurs $-0,70$; $0,30$ et $3,30$.

(b) Loi de probabilité de la variable a aléatoire X_6 :

x_i	$-0,70$	$0,30$	$3,30$
$P(X_6 = x_i)$	$0,6$	$0,3$	$0,1$

(c) $E(X_6) = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i P(X_6 = x_i) = -0,7 \times 0,6 + 0,3 \times 0,3 + 3,3 \times 0,1 = 0$.

2. (a) Loi de probabilité de la variable aléatoire X_n :

x_i	$-0,70$	$0,30$	$3,30$
$P(X_n = x_i)$	$\dfrac{n}{n+4}$	$\dfrac{3}{n+4}$	$\dfrac{1}{n+4}$

(b) $E(X_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} x_i P(X - n = x_i) = -0,7 \times \dfrac{n}{n+4} + 0,3 \times \dfrac{3}{n+4} + 3,3 \times \dfrac{1}{n+4} = \dfrac{-0,7n + 4,2}{n+4}$.

(c) On doit avoir $\dfrac{-0,7n + 4,2}{n+4} < 0 \iff -0,7n + 4,2 < 0$ puisque $n + 4$ est positif.
Ce qui donne $n > 6$. Donc, le club doit mettre au moins 7 boules noires pour que l'espérance soit négative.