Devoir surveillé n°6

Problème de bac, *Bac sti gm, 1999*

Soit f la fonction définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par

$$f(x) = \frac{x+2+\ln x}{x}.$$

La courbe représentative C de la fonction f dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ est tracée sur la feuille ci-jointe (**à compléter au fur et à mesure et à rendre avec la copie**).

Partie I : Étude de la fonction f

1. Calculer la limite de f en 0^+. Que peut on en déduire ?
2. (a) Vérifier que pour tout x de $]\,0\,;\,+\infty\,[$,
$$f(x) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}.$$
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (c) En déduire l'existence d'une asymptote D à la courbe C. Donner son équation et la tracer sur la feuille ci-jointe.
3. (a) Prouver que, pour tout x de $]\,0\,;\,+\infty\,[$,
$$f'(x) = \frac{-1-\ln x}{x^2}.$$
   (b) Montrer que $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en e^{-1}.
   (c) Établir le tableau de variation de f. Dans ce tableau, on donnera la valeur exacte du maximum de f.

Partie II : Position relative de deux courbes

Soit g la fonction définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par
$$g(x) = 1 + \frac{2}{x}$$
et H la courbe représentative de g dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

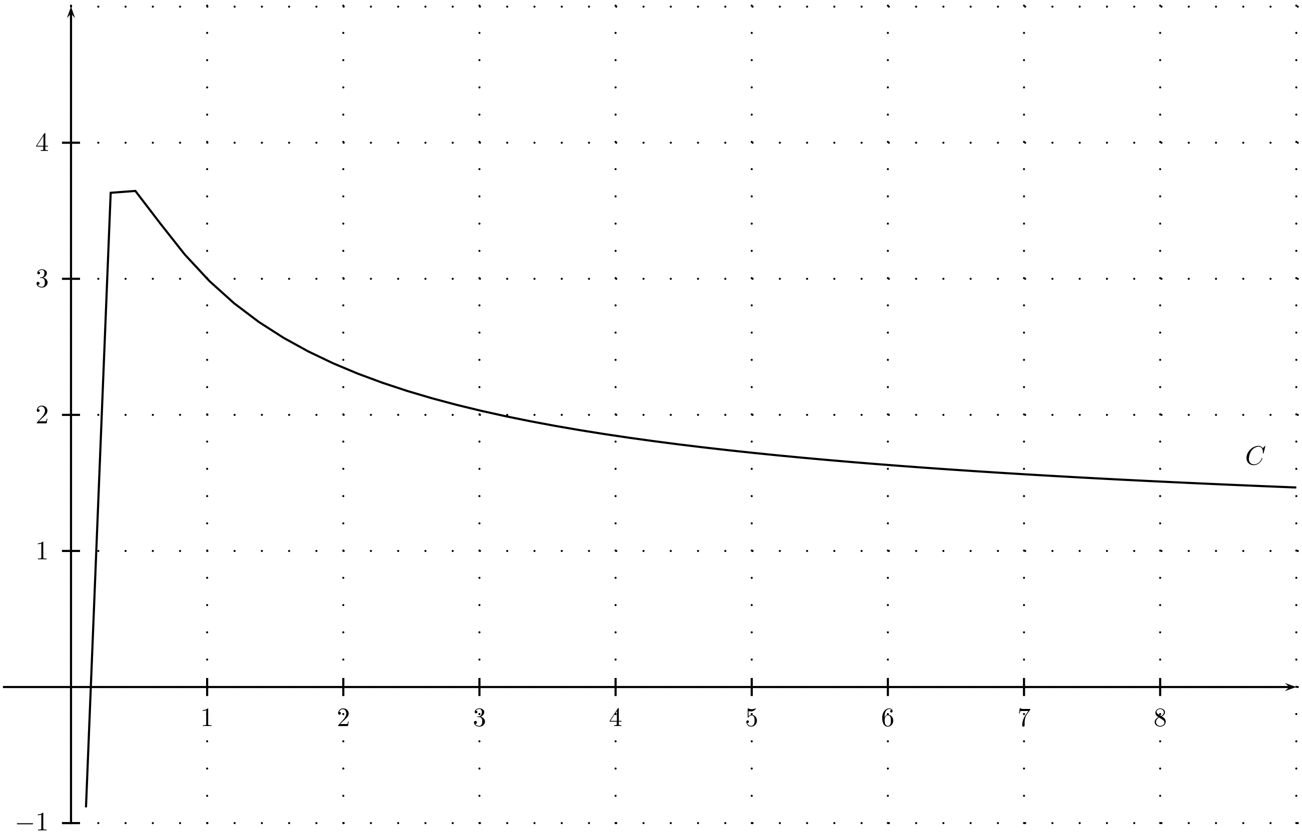
1. (a) Étudier la fonction g sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ (limites, dérivée, tableau de variation).
   (b) Donner les équations des deux asymptotes de la courbe H.
2. (a) Calculer $f(x) - g(x)$ et étudier son signe.
   (b) Étudier la position relative des deux courbes C et H.
   (c) On note K le point d'intersection de C et de H. Quelles sont ces coordonnées exactes ?
3. Placer le point K et construire la courbe H sur la feuille ci-jointe.

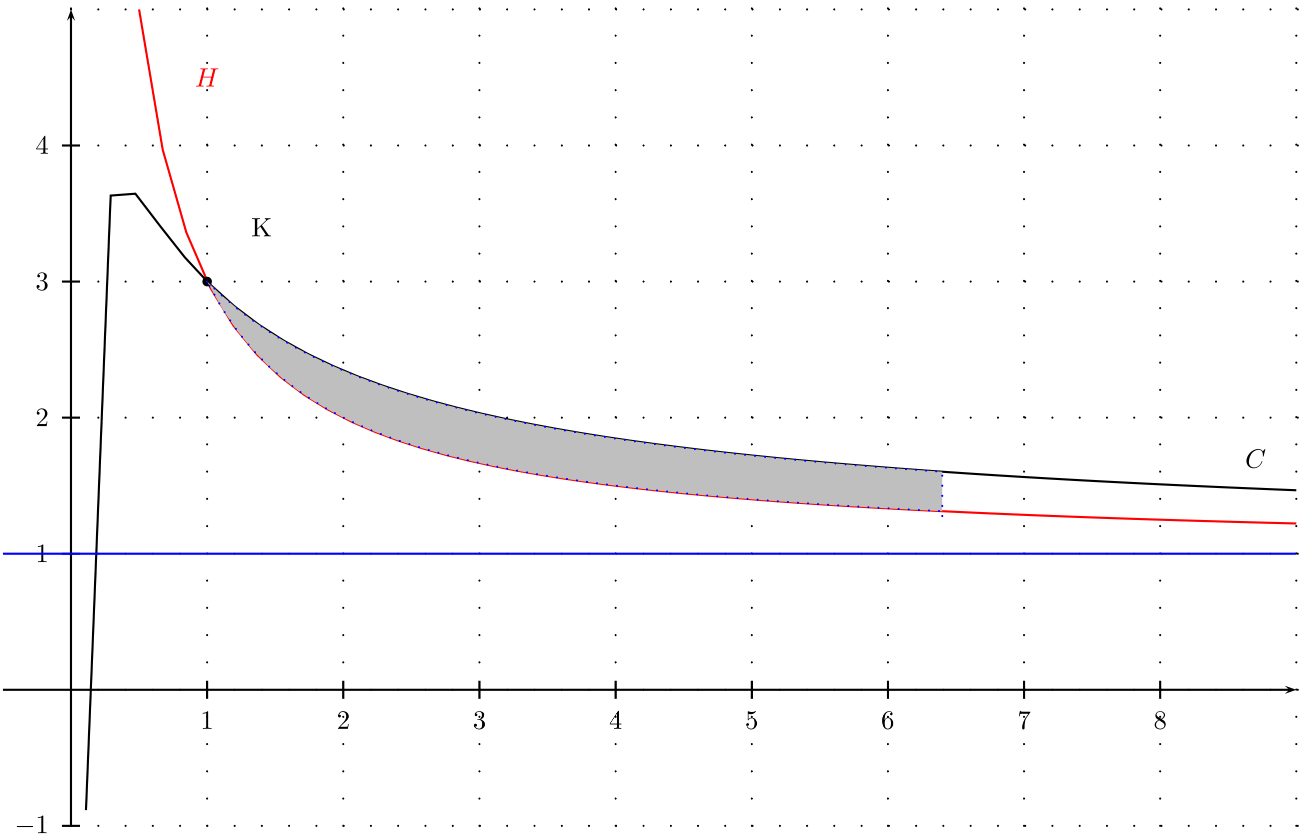
Partie III : Calcul d'une aire

On note A l'aire du domaine plan limité par les courbes C et H et par les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

1. Soit u la fonction définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par
$$u(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$
   Vérifier que u est une primitive de $\dfrac{\ln x}{x}$ sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.
2. Calculer A en unité d'aire. (On rappelle que $A = \displaystyle\int_1^{e^2} f(x) - g(x)\; dx = u(e^2) - u(1)$)
3. Hachurer l'aire correspondante sur le graphique.

N0M : ....





Correction du Devoir surveillé n°6

Partie I : Étude de la fonction f

1. Calcul de la limite en 0^+ :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} x+2=2\\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)=-\infty\end{array}\right\}\text{ donc, par somme, }\lim\limits_{x\to 0^+} x+2+\ln(x)=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} x+2+\ln(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+} x=0^+\end{array}\right\}\text{ donc, par quotient, }\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty}$$

ce qui prouve que $\boxed{\text{la droite d'équation } x=0 \text{ est asymptote verticale à la courbe de } f}$

2. (a) $f(x)=\dfrac{x}{x}+\dfrac{2}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$ d'où :

$$\boxed{f(x)=1+\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}}$$

(b) Calcul de la limite en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} 1=1\\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}=0\end{array}\right\}\text{ donc, par somme : }\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1}$$

(c) Le résultat précédent prouve alors que $\boxed{\text{la droite } y=1 \text{ est asymptote horizontale à la courbe de } f}$.

3. (a) $f'(x)=\dfrac{(1+0+\frac{1}{x})\times x-(x+2+\ln x)\times 1}{x^2}$

$f'(x)=\dfrac{x+1-x-2-\ln x}{x^2}$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-1-\ln x}{x^2}}$$

(b) Il est clair que $f'(x)$ est du signe de $-1-\ln x$ puisque x^2 est toujours positif.

Or $-1-\ln x\geq 0 \iff -1\geq \ln x \iff e^{-1}\geq x$

Et $-1-\ln x\leq 0 \iff -1\leq \ln x \iff e^{-1}\leq x$

Donc, $\boxed{f'(x) \text{ s'annule en changeant de signe en } e^{-1}}$

(c) Tableau de variation de f :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$1+e$	$\searrow$	1

$$f(e^{-1})=1+\frac{2}{e^{-1}}+\frac{\ln e^{-1}}{e^{-1}}=1+2e-e=1+e$$

Partie II : Position relative de deux courbes

1. (a) **Limites :**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} 1=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2}{x}=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc, par somme : }\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} 1=1\\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{x}=0\end{array}\right\}\text{ donc, par somme : }\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=1}$$

Dérivée :
$g'(x) = 0 - \dfrac{2}{x^2}$ donc : $\boxed{g'(x) = -\dfrac{2}{x^2}}$
Signe de $g'(x)$:
-2 est strictement négatif et x^2 est positif d'où : $\boxed{g'(x) < 0 \text{ sur }]\ 0\ ;\ +\infty\ [}$
Tableau de variation :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
Signe de $g'(x)$	$-$
Variations de f	$+\infty$ $\searrow$ 1

(b) Les limites précédentes nous indiquent deux asymptotes pour la courbe H :
$\boxed{x = 0 \text{ asymptote verticale et } y = 1 \text{ asymptote horizontale}}$

2. (a) $\boxed{f(x) - g(x) = \dfrac{\ln x}{x}}$
$f(x) - g(x)$ est du signe de $\ln x$ puisque x est toujours positif sur l'intervalle considéré.
Or, $\ln x \leq 0 \iff 0 < x \leq 1$
et $\ln x \geq 0 \iff x \geq 1$
Donc, $\boxed{f(x) - g(x) \leq 0 \iff 0 < x \leq 1 \text{ et } f(x) - g(x) \geq 0 \iff x \geq 1}$

(b) On récapitule le résultat précédent dans un tableau :

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f(x) - g(x)$	$-$	0	$+$
Comparaison	$f(x) \leq g(x)$	|	$f(x) \geq g(x)$
Position relative de C et$H$	C est en dessous de H	|	C est au dessus de H

Conclusion : $\boxed{C \text{ est en dessous de } H \text{ sur }]\ 0\ ;\ 1\ [\text{ égale en 1 et au dessus de } H \text{ sur }]\ 1\ ;\ +\infty\ [}$

(c) $K(1; g(1))$ donc : $\boxed{K(1;3)}$

3. Voir graphique

<u>Partie III : Calcul d'une aire</u>

1. $u'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln x = \dfrac{\ln x}{x}$
donc, $\boxed{u \text{ est une primitive de } \dfrac{\ln x}{x} \text{ sur }]\ 0\ ;\ +\infty\ [}$

2. $A = \displaystyle\int_1^{e^2} f(x) - g(x)\ dx = u(e^2) - u(1)$
$A = \dfrac{1}{2}(\ln(e^2))^2 - \dfrac{1}{2}(\ln(1))^2$
$A = \dfrac{1}{2} \times 2^2 - \dfrac{1}{2} \times 0^2$
$\boxed{A = 2 \text{ unités d'aire}}$

3. Voir graphique.