EXERCICE n° 1 (problème France juin 2007 - 11 points)
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \ln x + \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

L'objet de cette première partie est l'étude des limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. (a) Montrer que pour tout nombre réel strictement positif x, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}(x \ln x + 1)$.
   On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$. En déduire la limite de f en 0.

   (b) Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote $\mathcal{D}$ dont on donnera une équation.

Partie B : étude d'une fonction intermédiaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ par

$$g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

1. (a) On désigne par g' la dérivée de la fonction g.
   Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x, $g'(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$.

   (b) Étudier le signe de $g'(x)$. En déduire que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$. L'étude des limites n'est pas demandée.
2. (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right]$.

   (b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. Déduire des questions B_1 et B_2 le signe de $g(x)$, pour x appartenant à l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$.

Partie C : étude des variations de la fonction f et construction de la courbe associée

1. (a) f' désignant la dérivée de f, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \mathrm{e}^x g(x)$, pour tout nombre x appartenant àl'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$.

   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$.
2. (a) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

   (b) Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de $f(\alpha)$, en prenant $0,6$ pour valeur approchée de α.
3. (a) Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

x	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5
$f(x)$ à 10^{-1} près										

   (b) Construire l'asymptote $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathcal{C}$ pour x appartenant à l'intervalle $]\ 0\ ;\ 2,5\ ]$.

Partie D : calcul d'aire

1. Montrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$ par $F(x) = \mathrm{e}^x \ln x$ est une primitive de f.
2. On désire calculer l'aire de la partie $\mathcal{E}$ du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

   (a) Hachurer la partie $\mathcal{E}$ sur le dessin.

   (b) Déterminer la valeur exacte de l'aire de $\mathcal{E}$ en unités d'aires, puis en cm^2.

EXERCICE n° 2 (Problème France juin 2005 - 11 points)
L 'objectif est de déterminer une fonction dont la représentation graphique est donnée sur la page annexe à joindre à la copie, puis d'étudier certaines propriétés de cette fonction.

Partie A

Sur la page annexe, on a représené dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm, la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
La courbe $\mathcal{C}$ passe par les points de coordonnées A$(0; 4)$ et B$(-1,5; 1)$

1. Donner les valeurs de $f(0)$ et de $f(-1,5)$.
2. On suppose que pour tout nombre réel x, $f(x)$ s'écrit sous la forme suivante :

   $$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x} + 1, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

   Utiliser les résultats de la question **1** pour déterminer la valeur des nombres réels a et b

Partie B

Dans toute la suite du problème on étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2x+3)\mathrm{e}^{-x} + 1.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. (a) Montrer que pour tout nombre réel x : $f(x) = 2\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{3}{\mathrm{e}^x} + 1$.
   (b) Déterminer alors la limite de f en $+\infty$.
   En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ a une asymptote (D) dont on donnera une équation.
   (c) Démontrer que cette asymptote (D) coupe la courbe $\mathcal{C}$ au point B.
   (d) Étudier, en le justifiant soigneusement, la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite (D).
3. Prouver que la dérivée f' de la fonction f est définie pour tout nombre réel x par :

   $$f'(x) = (-2x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

4. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Déterminer une équation de la droite (T) tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.

Partie C

On rappelle que, sur la feuille annexe jointe, à rendre avec la copie, on a représenté la courbe dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 *cm.*

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente Δ à la courbe $\mathcal{C}$ au point E d'abscisse $(-0,5)$.
   Tracer sur la feuille annexe la tangente en Δ.
   Compléter cette figure en représentant l'asymptote (D) et la tangente (T).
   Hachurer la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$.
2. Montrer que la fonction F définie par

   $$F(x) = (-2x-5)\mathrm{e}^{-x} + x$$

   est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie hachurée précédemment. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$, puis en donner une valeur arrondie au centième.

EXERCICE n° 3 (Problème nouvelle calédonie novembre 2008 - 11 points)
Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal $(\mathrm{O}; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$.$(L'unitégraphiqueest4$ *cm.*)
Le but du problème est l'étude de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x + x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan $\mathcal{P}$.

I - Étude d'une fonction auxiliaire
On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^x(x-2) - 1.$$

1. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. Étude des variations de g
   (a) Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g et étudier son signe sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Résolution de l'équation $g(x) = 0$
   (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution, notée α, appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ 3]$.
   (b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

II - Étude de la fonction *f*
1. Étude de la limite en $+\infty$.
   (a) Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,

$$f(x) = \frac{1 + \mathrm{e}^{-x}}{1 + x\mathrm{e}^{-x}}.$$

   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.
2. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 1$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Étude des variations de f
   (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(\mathrm{e}^x + x)^2}$ où g est la fonction définie en 1.
   (b) Déduire de la question I. 4., le sens de variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
4. Construire la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$ dans le repère .

III - Calcul d'aire
On note $\mathcal{B}$ l'aire, exprimée en cm^2 du domaine limitée par la courbe $\mathcal{C}$, la droite $\mathcal{D}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

1. Hachurer sur le graphique le domaine $\mathcal{B}$.
2. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. En déduire la valeur exacte de $\mathcal{B}$, puis une valeur approchée arrondie au mm^2.

EXERCICE n° 4 (Problème France septembre 2008 - 9 points)
Étude de l'énergie fournie par le rayonnement solaire

Le but de ce problème est d'étudier le rayonnement solaire en un point de la surface de la Terre dont la latitude est 45° N et l'altitude 900 m.
Dans les questions **1., 2.** et **3.**, on étudie le rayonnement solaire un 21 mars ensoleillé sur un plan perpendiculaire au rayonnement solaire d'une surface de 1 m^2.

1. On suppose d'abord que le rayonnement solaire exprimé en W/m^2 est donné en fonction de l'inclinaison θ du soleil (θ étant exprimé en degrés) par $p(\theta) = 1230\mathrm{e}^{\frac{-1}{3,8\sin(\theta+1,6)}}$.
   On attire l'attention du candidat quant à l'utilisation de la calculatrice pour ces calculs : dans la formule ci-dessus le sinus porte sur un angle exprimé en degrés.

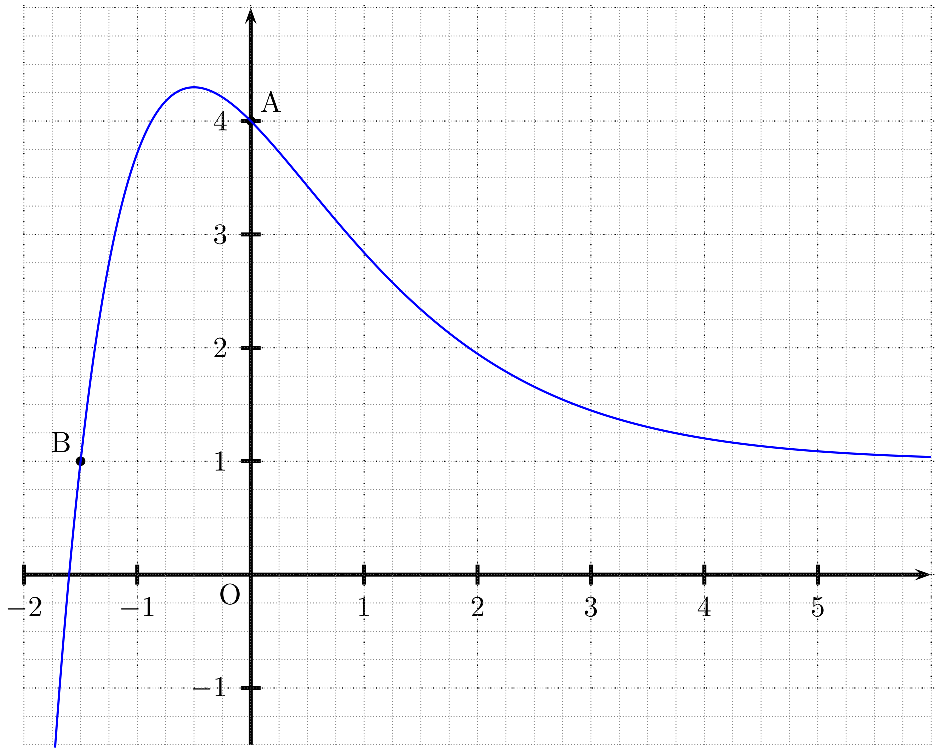
heure solaire	6 h	7 h	8 h	9 h	10 h	11 h	12 h	13 h	14 h	15 h	16 h	17 h	18 h
inclinaison θ du soleil (en °)	0	10,5	20,7	30	37,7	43	45	43	37,7	30	20,7	10,5	0
rayonnement solaire $p(\theta)$ (en W/m^2)		350		744			856						

2. On veut maintenant modéliser l'évolution du rayonnement solaire en fonction de l'heure.
   On définit la variable t comme étant le temps écoulé depuis le lever du soleil, qui se produit à 6 heures. Pour des raisons de symétrie entre le matin et l'après-midi, on se limitera à faire varier t dans l'intervalle $[0\,;\,6]$, ce qui correspond à des heures solaires variant entre 6 h et 12 h.
   On admet que le rayonnement solaire (en W/m^2) peut être exprimé en fonction de t par :
   $f(t) = 856\left(1 - \mathrm{e}^{-0,6t}\right)$.
   (a) Compléter le duplicata du tableau 2 ci-dessous, fourni en annexe (à joindre à la copie).

heure solaire	6 h	7 h	8 h	9 h	10 h	11 h	12 h
temps t (en heures)	0	1	2	3	4	5	6
rayonnement solaire $f(t)$ (en W/m^2)				715			833

   (b) On désigne par f' la dérivée de la fonction f.
   Calculer $f'(t)$ et étudier son signe sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.
   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.
   (d) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal (2 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour 100 unités en ordonnée).
   (e) Donner une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. Tracer $\mathcal{T}$ dans le même repère que $\mathcal{C}$.
   (f) Les dernières lignes des tableaux 1 et 2 vous paraissent-elles cohérentes ?
3. La quantité d'énergie solaire E, exprimée en Wh, reçue au cours de la journée, est donnée par :
   $$\mathrm{E} = 2\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = 1712\int_0^6 \left(1 - \mathrm{e}^{-0,6t}\right)\,\mathrm{d}t.$$
   Calculer la valeur exacte de E puis fournir la valeur arrondie à l'unité.
4. On s'intéresse maintenant à l'énergie solaire reçue sur une année.
   Un logiciel de météorologie fournit une énergie solaire annuelle égale à 1206 kWh, toujours pour une surface de 1 m^2.
   (a) Vérifier que cette valeur correspond environ à 161 journées telles que celle étudiée aux questions **1., 2.** et **3.**.
   (b) On suppose qu'un dispositif de production d'énergie électrique reçoit l'énergie solaire sur une surface de 1 km^2 et qu'il convertit 20 % de cette énergie en électricité.
   Combien d'habitants auraient leur consommation électrique domestique fournie par ce dispositif, sachant qu'un habitant consomme en moyenne 700 kWh/an d'énergie électrique domestique (hors chauffage) ?

Annexe du problème à rendre avec la copie



ANNEXE RELATIVE AU PROBLÈME

(à rendre avec la copie)

heure solaire	6 h	7 h	8 h	9 h	10 h	11 h	12 h	13 h	14 h	15 h	16 h	17 h	18 h
inclinaison θ du soleil (en °)	0	10,5	20,7	30	37,7	43	45	43	37,7	30	20,7	10,5	0
rayonnement solaire $p(\theta)$ (en W/m^2)		350		744			856						

Tableau 1

heure solaire	6 h	7 h	8 h	9 h	10 h	11 h	12 h
temps t (en heures)	0	1	2	3	4	5	6
rayonnement solaire $f(t)$ (en W/m^2)				715			833

Tableau 2