EXERCICE n° 1 (juin 2008 - 5 points)

On considère les nombres. complexes

$$z_{\mathrm{A}} = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}, \quad z_{\mathrm{B}} = 4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{C}} = -2 + 2\mathrm{i}.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal.

Les parties I et II sont indépendantes

Partie I : Q. C. M.

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B, C ou D est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

On ne demande aucune justification.

NOTATION : *chaque réponse juste rapporte* $0,5$ *point, une réponse fausse enlève* $0,25$ *point. Une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.*

Si le total des points est négatif, il est ramené à 0.

1. Le nombre complexe $Z_1 = z_{\mathrm{A}} z_{\mathrm{B}}$ est :

   Réponse A : un nombre réel positif
   Réponse B : un nombre réel négatif
   Réponse C : un nombre imaginaire pur
   Réponse D : l'affixe d'un point du plan complexe pris hors des axes

2. Le nombre complexe $Z_2 = z_{\mathrm{A}}^6$ est :

   Réponse A : un nombre réel positif
   Réponse B : un nombre réel négatif
   Réponse C : un nombre imaginaire pur
   Réponse D : l'affixe d'un point du plan complexe pris hors des axes

3. Le nombre complexe conjugué de z_{A} est :

   Réponse A : $-4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$
   Réponse B : $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}}$
   Réponse C : $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$
   Réponse D : $\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

4. Le nombre complexe z_{C} peut se mettre sous la forme :

   Réponse A : $2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
   Réponse B : $2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$
   Réponse C : $2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$
   Réponse D : $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

Partie II

On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_{A}, z_{B} et z_{C}.

1. Soit M un point du plan d'affixe z.
   (a) Interpréter géométriquement $|z - z_{\mathrm{A}}|$.
   (b) Quel est l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie l'égalité :
   $|z - z_{\mathrm{A}}| = |z - z_{\mathrm{B}}|$.
   (c) Vérifier que le point C appartient à l'ensemble $\mathcal{D}$.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en C.
3. Déduire des questions 1. et 2. la nature du triangle ABC.

EXERCICE n° 2 (juin 2007 - 5 points)

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation

$$z^2 + 2z + 10 = 0.$$

2. Déterminer les nombres complexes c et d vérifiant le système :

$$\begin{cases} -2c + d &= 1 + 13\mathrm{i} \\ -c + d &= 4 + 8\mathrm{i} \end{cases}$$

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.
   (a) Placer sur une figure les points A, B, C et D dont les affixes respectives sont :

$$-1 + 3\mathrm{i},\ -1 - 3\mathrm{i},\ 3 - 5\mathrm{i}\ \text{ et } 7 + 3\mathrm{i}.$$

   (b) Démontrer que le triangle BAD est rectangle en A.
   (c) Démontrer que le triangle BCD est rectangle en C.
   (d) En déduire que les quatre points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on déterminera le centre Ω et le rayon. Tracer le cercle sur la figure.

EXERCICE n° 3 (juin 2006 - 5 points)

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
On considère les nombres complexes suivants :

$$z_{\mathrm{A}} = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{6}, \qquad z_{\mathrm{B}} = 2 - 2\mathrm{i}.$$

On pose $z = \frac{z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}}$.

1. Écrire z sous forme algébrique.
2. (a) Calculer le module et un argument de z_{A} et de z_{B}.
   (b) En déduire le module et un argument de z.
   (c) Ecrire z sous forme trigonométrique.
3. Déduire des résultats obtenus aux questions précédentes les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et de $\sin \frac{7\pi}{12}$.
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.
   (a) Sur papier millimétré, construire les points A et B, images respectives de z_{A} et de z_{B}.
   (b) Déterminer la nature du triangle OAB.