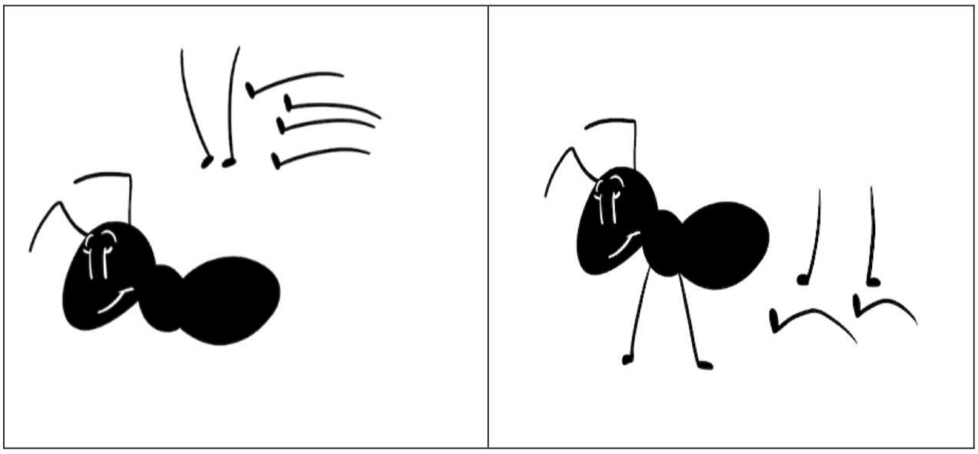
Ce document est un exemple de corrigé du sujet du groupement 2 proposé le 6 avril 2022 au (nouveau) concours de professeur des écoles, il ne s'agit pas d'un corrigé officiel.

EXERCICE 1

Un enseignant de grande section propose à ses élèves un jeu pour travailler la décomposition et la recomposition de nombres. Le jeu se compose de deux dés cubiques équilibrés et de corps de fourmis à compléter avec des pattes comme sur le dessin ci-dessous.



Sur les six faces du premier dé sont inscrits les nombres suivants : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5.
Sur les six faces du deuxième dé sont inscrits les nombres suivants : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 5.
On donne à chaque élève un corps de fourmi et 6 pattes à fixer sur le corps.

Au début de la partie, chaque élève choisit un nombre compris entre 2 et 10. Ce nombre reste le même durant toute la partie. À tour de rôle, chaque élève joue. Il lance les deux dés :

- si la somme des nombres inscrits sur les faces supérieures des deux dés est égale au nombre choisi par cet élève, alors celui-ci fixe une patte à sa fourmi et relance les dés.
- sinon, c'est au joueur suivant de lancer les dés.

Il donne ensuite les dés au joueur suivant.
La partie se termine lorsqu'un élève a gagné, en fixant les six pattes de sa fourmi.

1. Un élève choisit un nombre et lance les dés.
   (a) Quelles sont les différentes sommes qu'il peut obtenir ?
   On peut, par exemple, recenser toutes les possibilités grâce à un tableau.

dé 2 / dé 1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**5**
1	2	3	4	5	6	6
1	2	3	4	5	6	6
2	3	4	5	6	7	7
3	4	5	6	7	8	8
4	5	6	7	8	9	9
5	6	7	8	9	10	10

   On peut obtenir les sommes 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 et 10.

(b) Montrer que la probabilité qu'il obtienne 8 est égale à $\dfrac{4}{36}$.

Les dés sont équilibrés, les issues du tableaux sont donc équiprobables.
On a 4 issues dans le tableau égales à 8 sur un total de 36, donc, la probabilité d'obtenir une somme de 8 est égale à $\dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$.

2. Un autre élève choisit le nombre 6 et lance les dés.

(a) Quelle est la probabilité qu'il gagne une patte pour sa fourmi dès son premier lancer ?
L'élève peut placer sa patte au premier lancer s'il obtient une somme de 6.
D'après le tableau, on a 8 issues possibles.
La probabilité que l'élève gagne une patte au premier lancer est de $\dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$.

(b) Quelle est la probabilité qu'il gagne deux pattes pour sa fourmi en 2 lancers ?
L'élève peut placer deux pattes en deux lancers s'il obtient une somme de 6 au premier lancer (probabilité égale à $\dfrac{2}{9}$), et une somme de 6 au deuxième lancer (probabilité égale à $\dfrac{2}{9}$) d'après la question précédente.
On a alors $p = \dfrac{2}{9} \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{4}{81}$.
La probabilité que l'élève gagne deux pattes en deux lancers est de $\dfrac{4}{81}$.

3. Eden et Axelle commencent une partie. Eden choisit le nombre 6 et Axelle choisit un autre nombre.

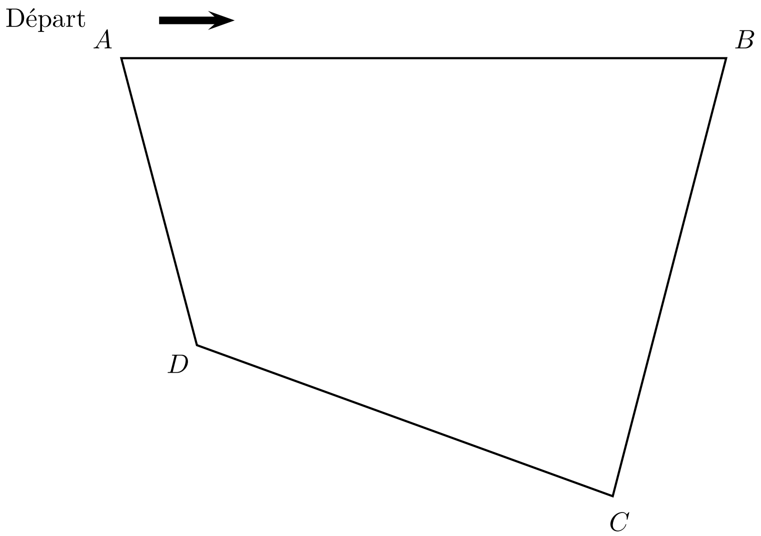
(a) Qui a le plus de chance de gagner la partie ? Justifier.
D'après la question **2.(a)**, Eden a une probabilité de $\dfrac{8}{36}$ de gagner une patte à chaque lancer.
Axelle, quant à elle, choisit un autre nombre que 6. Soit p_i la probabilité d'obtenir la somme « i » à un lancer, on a les résultats suivants :
$p_2 = \dfrac{2}{36}$; $p_3 = \dfrac{3}{36}$; $p_4 = \dfrac{4}{36}$; $p_5 = \dfrac{5}{36}$; $p_7 = \dfrac{5}{36}$; $p_8 = \dfrac{4}{36}$; $p_9 = \dfrac{3}{36}$; $p_{10} = \dfrac{2}{36}$.
Chacune des probabilités p_i est inférieure à p_6 donc, Eden a plus de chance de gagner la partie.

(b) Eden est-il sûr de gagner la partie ? Justifier.
Eden a, certes, une probabilité supérieure de gagner, mais cela ne veut pas dire qu'il gagnera de manière certaine.
Pour compléter sa fourmi, il doit obtenir une somme de 8 à 6 lancers, qu'ils soient consécutifs ou non.
De la même manière, Axelle doit obtenir la somme choisie à 6 lancers.
Imaginons, par exemple, qu'Axelle choisisse la somme de 2 et qu'elle obtienne cette somme 6 fois de suite dès le premier lancer alors qu'Eden n'a pas obtenu la somme de 8, Axelle gagne. Ce contre-exemple montre qu'Eden n'est pas sûr de gagner la partie.

Exercice 2

Dans le cadre d'une liaison écoles-collège, une professeure d'EPS et une professeure des écoles organisent une course à vélo dont le parcours est composé de quatre tronçons en ligne droite.
La figure ci-dessous représente le parcours et n'est pas à l'échelle. Les élèves partent du point A et tournent dans le sens des aiguilles d'une montre. Les dimensions sont les suivantes :

$$AB = 960 \text{ m}, BC = 1,05 \text{ km}, CD = 780 \text{ m et } AD = 660 \text{ m}.$$



1. Montrer que le parcours a pour longueur 3 450 m.
   $AB + BC + CD + AD = 960 \text{ m} + 1\,050 \text{ m} + 780 \text{ m} + 660 \text{ m} = 3\,450 \text{ m}$.
   Le parcours a pour longueur 3 450 m.

2. Durant l'épreuve, Léo a réalisé, en 48 minutes, 2 tours complets et un tiers de tour du parcours.
   (a) Déterminer la distance parcourue par Léo.
   2 tours mesurent $2 \times 3\,450 \text{ m} = 6\,900 \text{ m}$ et un tiers de tour mesure $\frac{1}{3} \times 3\,450 \text{ m} = 1\,150 \text{ m}$.
   Or, $6\,900 \text{ m} + 1\,150 \text{ m} = 8\,050 \text{ m} = 8,05 \text{ km}$.
   Léo a parcouru une distance de 8,05 km.

   (b) Donner la vitesse moyenne de Léo en km/h.
   $v = \frac{d}{t} = \frac{8\,050 \text{ m}}{48 \text{ min}} = \frac{8,05 \text{ km}}{\frac{48}{60} \text{ h}} = 10,0625 \text{ km/h}$.
   La vitesse moyenne de Léo est de 10,0625 km/h.

   (c) En gardant la même vitesse moyenne, Léo aura-t-il parcouru 15 km en moins d'une heure et demie ? Justifier.
   $v = \frac{d}{t} \iff t = \frac{d}{v} = \frac{15 \text{ km}}{10,0625 \text{ km/h}} \approx 1,49 \text{ h}$.
   Or, 1 heure et demi correspond à 1,5 heure (heure décimale) qui est bien supérieur à 1,49.
   Léo aura donc parcouru les 15 km en (à peine) moins d'une heure et demie.

3. Une épreuve en relais est ensuite proposée. Tara parcourt les distances AB et BC à une vitesse moyenne de 10 km/h et Kevin parcourt les distances CD et DA à une vitesse moyenne de 6 km/h.
   Quelle est la vitesse moyenne de ce binôme sur l'ensemble du parcours ? Justifier.

- Calcul du temps t_1 mis par Tara sur les deux premières portions $[AB]$ et $[CD]$:
la distance parcourue est de 960 m + $1,05$ km = $0,96$ km + $1,05$ km = $2,01$ km.
$t_1 = \frac{d}{v} = \frac{2,01 \text{ km}}{10 \text{ km/h}} = 0,201$ h.
- Calcul du temps t_2 mis par Kevin sur les deux dernières portions $[CD]$ et $[DA]$:
la distance parcourue est de 780 m + 660 m = 1 440 m = $1,44$ km.
$t_2 = \frac{d}{v} = \frac{1,44 \text{ km}}{6 \text{ km/h}} = 0,24$ h.
- Calcul du temps total :
$t = t_1 + t_2 = 0,201 \text{ h} + 0,24 \text{ h} = 0,441$ h.
- Calcul de la vitesse moyenne :
$v = \frac{d}{t} = \frac{3,45 \text{ km}}{0,441 \text{ h}} \approx 7,82$ km/h.

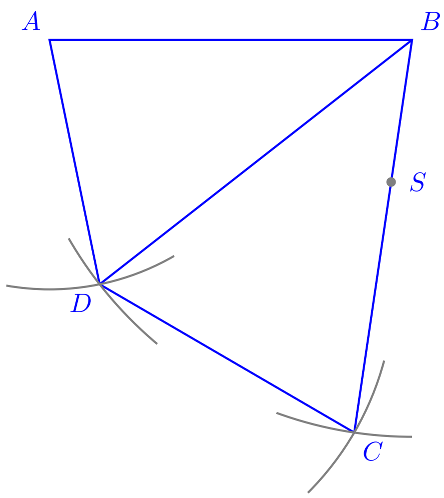
La vitesse moyenne du binôme est d'environ 7,82 km/h.

4. (a) La diagonale $[BD]$ mesure 1,05 km. Représenter le parcours à l'échelle $\frac{1}{20\,000}$.
Une échelle de $\frac{1}{20\,000}$ signifie que 1 cm sur le dessin représente 20 000 cm, soit 200 m dans la réalité.
On peut récapituler les différentes distances dans un tableau de proportionnalité :

	échelle	AB	BC	CD	DA	BD
Longueur réelle, en m	200	960	1 050	780	660	1 050
Longueur sur la figure, en cm	1	4,8	5,25	3,9	3,3	5,25

$\downarrow \div 200$

On obtient alors la figure suivante, à l'échelle $\frac{1}{20\,000}$:

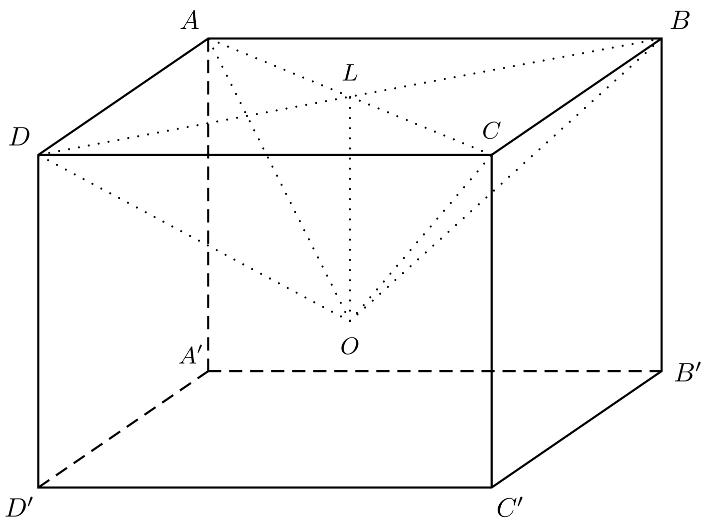


.

(b) Amina a roulé à vélo pendant 25 minutes à une vitesse moyenne de 11,5 km/h.
Placer sur la figure tracée à la question **4.(a)** le point S à l'endroit où se trouve Amina au bout de sa course. Justifier.
On calcule la distance parcourue par Amina :
$d = v \times t = 11,5 \text{ km/h} \times 25 \text{ min} = 11,5 \text{ km/h} \times \frac{25}{60} \text{ h} \approx 4,792 \text{ km} \approx 4\,792$ m.
Or, $4\,792 \text{ m} = 3\,450 \text{ m} + 1\,342$ m, elle a donc parcouru un tour entier, plus $1\,342$ m.
Elle se retrouvera alors sur la portion [BC], à $1\,342 \text{ m} - 960 \text{ m} = 382$ m de B.
Il nous reste à utiliser l'échelle : $382 \div 200 = 1,91$ donc, on place donc le point S à 1,91 cm de B.

Exercice 3

On considère un pavé droit $ABCDA'B'C'D'$ avec $DD' = 5$ cm ; $DC = 6$ cm et $DA = 7$ cm.
On note L le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$.
On souhaite creuser ce pavé, en retirant une pyramide $OABCD$ de hauteur $[OL]$.

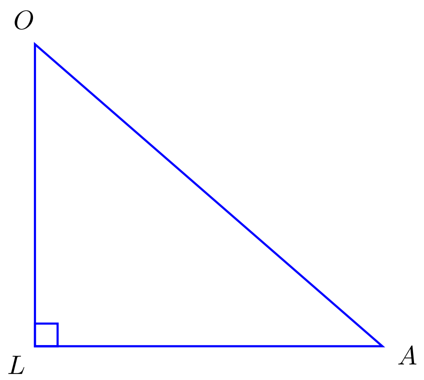


Partie A

Dans cette partie, on suppose que $OL = 4$ cm.

1. Montrer que $AL \approx 4,6$ cm.
   Dans le triangle ADC rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore, on a :
   $AC^2 = AD^2 + DC^2 = (7 \text{ cm})^2 + (6 \text{ cm})^2 = 85 \text{ cm}^2$.
   $AC = \sqrt{85}$ cm.
   L étant le point d'intersection des diagonales du rectangle $ABCD$, il est situé au milieu de chaque diagonale, donc $AL = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{85}$ cm $\approx 4,61$ cm.
   On a bien $AL \approx 4,61$ cm.

2. Construire le triangle ALO en vraie grandeur.
   $[OL]$ est la hauteur de la pyramide $OABCD$, on a donc (OL) perpendiculaire au plan (ABC), donc à toute droite de ce plan, en particulier à (AL).
   Le triangle ALO est donc rectangle en L tel que $OL = 4$ cm et $AL \approx 4,61$ cm.



3. (a) Calculer le volume de la pyramide $OABCD$.
On rappelle que le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.
$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABCD} \times OL = \dfrac{1}{3} \times 6 \text{ cm} \times 7 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 56 \text{ cm}^3$.
Le volume de la pyramide est égal à 56 cm^3.

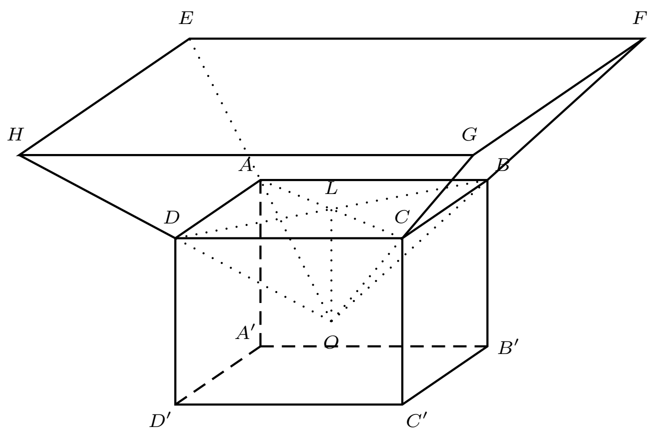
(b) Calculer le volume du pavé creusé.
Le volume du pavé creusé s'obtient en soustrayant le volume de la pyramide $OABCD$ au volume du pavé droit $ABCDA'B'C'D'$:
$\mathcal{V} = 5 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \times 7 \text{ cm} - 56 \text{ cm}^3 = 210 \text{ cm}^3 - 56 \text{ cm}^3 = 154 \text{ cm}^3$.
Le volume du pavé creusé est égal à 154 cm^3.

Partie B

Dans cette partie, on pose $OL = x$, où x est un nombre compris entre 0 et 5.

Le pavé creusé que l'on obtient est le socle en bois d'un trophée.

Sur ce socle, on pose une pyramide en verre $OEFGH$ qui est un agrandissement de la pyramide $OABCD$ de rapport 2.



1. Exprimer le volume de la pyramide $OABCD$ en fonction de x.
Les longueurs sont exprimées en cm, les volumes en cm^3.
$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABCD} \times OL = \dfrac{1}{3} \times 6 \times 7 \times x = 14x$.
Le volume de la pyramide est égal à $14x$.

2. Montrer que le volume du socle en bois est $210 - 14x$.
Le volume du socle en bois correspond au volume du pavé creusé et s'obtient en soustrayant le volume de la pyramide $OABCD$ au volume du pavé droit $ABCDA'B'C'D'$:
$\mathcal{V} = 5 \times 6 \times 7 - 14x = 210 - 14x$.
Le volume du socle en bois est égal à $210 - 14x$.

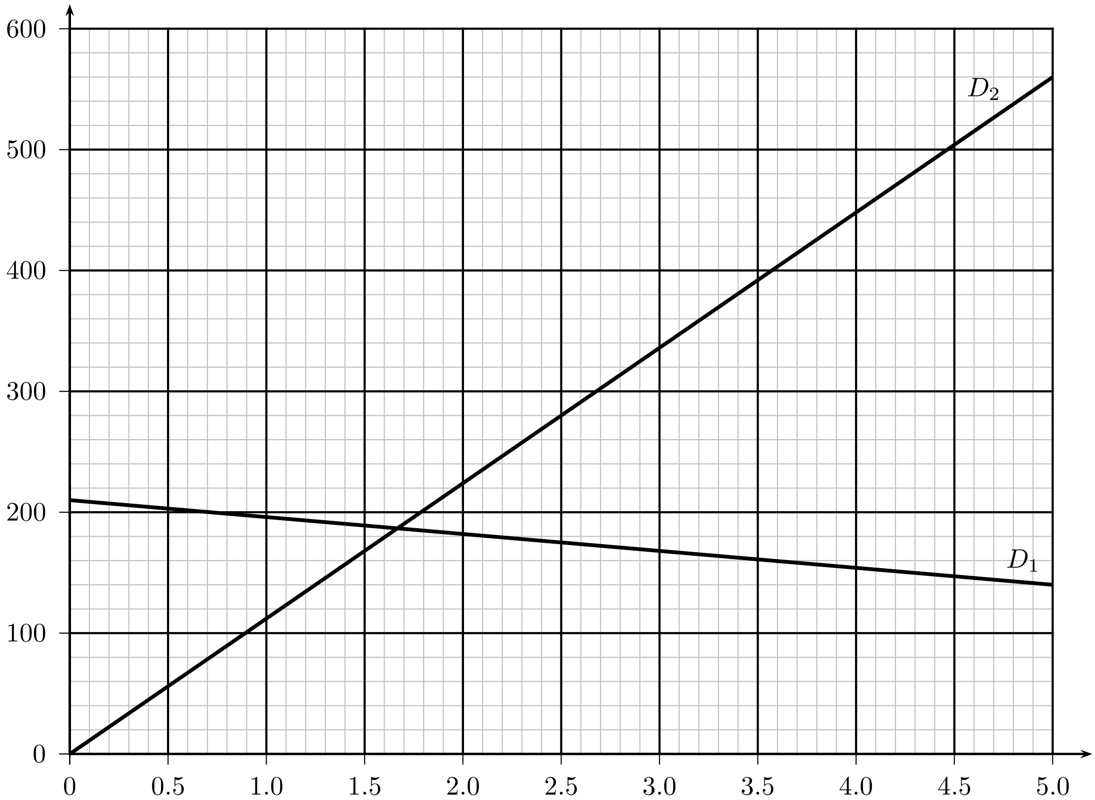
3. Montrer que le volume de la pyramide en verre $OEFGH$ est $112x$.
La pyramide $OEFGH$ est un agrandissement de facteur 2 de la pyramide $OABCD$.
Son volume est donc 2^3 fois plus grand.
$\mathcal{V}_{OEFGH} = 2^3 \times \mathcal{V}_{OABCD} = 8 \times 14x = 112x$.
Le volume de la grande pyramide en verre est égal à $112x$.

4. Quelle valeur choisir pour x, pour que le volume de la pyramide en verre soit égal au double du volume du socle en bois ?
On résout l'équation : $112x = 2 \times (210 - 14x) \iff 112x = 420 - 28x$
$$\iff 112x + 28x = 420$$
$$\iff 140x = 420$$
$$\iff x = \frac{420}{140} = 3.$$
Le volume de la pyramide en verre est égal au double du volume du socle en bois pour $x = 3$.

5. On considère les fonctions f et g définies pour tout x compris entre 0 et 5 par :

$$f(x) = 210 - 14x \text{ et } g(x) = 112x$$

On a représenté dans un repère orthogonal ces deux fonctions.



(a) Déterminer quelle fonction (f ou g) est représentée par chacune des droites D_1 et D_2 ? Justifier.
g est une fonction linéaire, elle passe par l'origine dur repère, c'est donc la droite D_2.
f est donc représentées par la droite D_1.
f est représentée par la droite D_1 et g par D_2.

(b) Déterminer avec la précision permise par le graphique les valeurs de x pour lesquelles le volume du socle en bois est inférieur ou égal au volume de la pyramide en verre.
Graphiquement, il suffit de déterminer les abscisses pour lesquelles la droite D_1 est en dessous de la droite D_2.
Le volume du socle en bois est inférieur ou égal au volume de la pyramide en verre pour des valeurs x supérieures ou égales à 1,65 environ (et inférieures ou égales à 5).

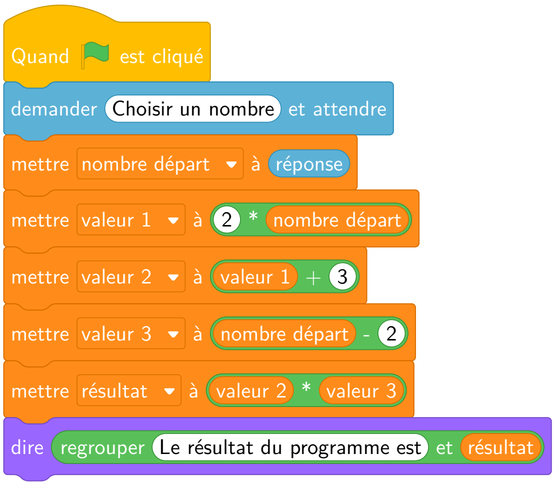
(c) Retrouver le résultat précédent en posant puis en résolvant une inéquation.
On résout l'inéquation : $210 - 14x \leqslant 112x \iff 210 \leqslant= 112x + 14x$

$$\begin{aligned} &\iff 210 \leqslant 126x \\ &\iff \frac{210}{126} \leqslant x \\ &\iff \frac{5}{3} \leqslant x. \end{aligned}$$

Le volume du socle en bois est inférieur ou égal au volume de la pyramide en verre pour des valeurs x comprises entre $\frac{5}{3}$ et 5 inclus.

EXERCICE 4

1. Adam a réalisé le programme ci-contre à l'aide du logiciel Scratch.



   (a) Montrer que si le nombre de départ est 3, le résultat est égal à 9.
   On obtient les valeurs suivantes :
   nombre départ $\leftarrow 3$
   valeur 1 $\leftarrow 2 \times 3 = 6$
   valeur 2 $\leftarrow 6 + 3 = 9$
   valeur 3 $\leftarrow 3 - 2 = 1$
   résultat $\leftarrow 9 \times 1 = 9$
   Si le nombre de départ est 3, alors le résultat est 9.

   (b) Quel est le résultat donné par le programme si le nombre de départ est 2,4 ?
   On obtient les valeurs suivantes :
   nombre départ $\leftarrow 2,4$
   valeur 1 $\leftarrow 2 \times 2,4 = 4,8$
   valeur 2 $\leftarrow 4,8 + 3 = 7,8$
   valeur 3 $\leftarrow 2,4 - 2 = 0,4$
   résultat $\leftarrow 7,8 \times 0,4 = 3,12$
   Si le nombre de départ est 2,4, alors le résultat est 3,12.

   (c) Soit x le nombre de départ. Montrer que le programme d'Adam retourne le nombre $2x^2 - x - 6$.
   On obtient les valeurs suivantes :
   nombre départ $\leftarrow x$
   valeur 1 $\leftarrow 2 \times x = 2x$
   valeur 2 $\leftarrow 2x + 3$
   valeur 3 $\leftarrow x - 2$
   résultat $\leftarrow (2x + 3) \times (x - 2)$
   Si le nombre de départ est x, alors le résultat est $(2x + 3)(x - 2)$.

2. Pauline propose le programme de calcul suivant.

Choisis un nombre. Élève-le au carré. Soustrais 3. Multiplie par 2. Soustrais le nombre de départ.

   (a) Montrer que si le nombre de départ est 3, le résultat obtenu est égal à 9.
   $3 \xrightarrow{x^2} 9 \xrightarrow{-3} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{-3} 9$
   Si le nombre de départ est 3, alors le résultat est 9.

   (b) Quel est le résultat donné par le programme si le nombre de départ est $\dfrac{7}{3}$?
   $\dfrac{7}{3} \xrightarrow{x^2} \dfrac{49}{9} \xrightarrow{-3} \dfrac{22}{9} \xrightarrow{\times 2} \dfrac{44}{9} \xrightarrow{-\frac{7}{3}} \dfrac{33}{9}$.
   Si le nombre de départ est $\dfrac{7}{3}$, alors le résultat est $\dfrac{23}{9}$.

3. Montrer que, pour un même nombre de départ, les programmes de calcul d'Adam et Pauline donnent le même résultat.
   Pour Adam, pour un nombre quelconque x choisi, le résultat est égal à
   $$\begin{aligned}(2x+3)\times(x-2) &= (2x)\times x-(2x)\times 2+3\times x-3\times 2\\ &= 2x^2-4x+3x-6\\ &= 2x^2-x-6\end{aligned}$$
   Pour Pauline, pour un nombre quelconque x choisi, le résultat est égal à
   $x \xrightarrow{x^2} x^2 \xrightarrow{-3} x^2-3 \xrightarrow{\times 2} 2x^2-6 \xrightarrow{-x} 2x^2-x-6$
   Pour un même nombre de départ, les programmes d'Adam et de Pauline sont équivalents.

4. Déterminer le ou les nombres de départ possibles pour que les résultats des programmes de calcul soient nuls. Justifier.
   Le programme d'Adam donne un résultat de $(2x+3)(x-2)$ pour un nombre x de départ.
   On résout donc l'équation $(2x+3)(x-2)=0$.
   Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.
   $2x+3=0 \iff x=-\dfrac{3}{2}$ ou $x-2=0 \iff x=2$.
   Pour $x=-\dfrac{3}{2}$ ou $x=2$, le résultat vaut 0.

5. Adam souhaite automatiser les calculs de son programme pour les entiers naturels. Il utilise un tableur dont la copie d'écran est donnée ci-dessous.
   Quelle formule doit-il saisir dans la case B2 pour qu'il puisse l'étirer vers le bas sur l'ensemble de la colonne ?

	A	B
1	Nombre de départ	Résultat du programme
2	1	-5
3	2	0
4	3	9
5	4	22
6	5	39

   En `B2`, on peut entrer, par exemple, la formule `=2*A2*A2-A2-6`.

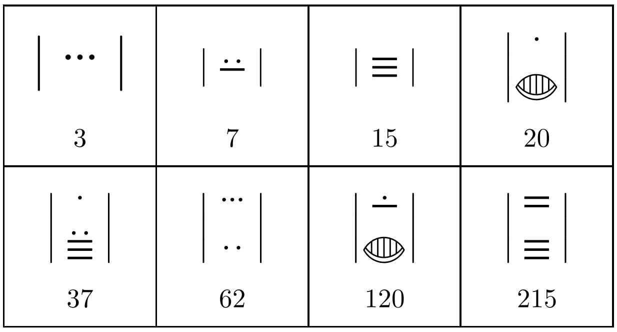
EXERCICE 5

En Amérique centrale, les Mayas utilisaient un système de numération comprenant trois signes.

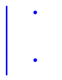
Le point	·
Le trait	—
La coquille	

Le signe « coquille » indique l'absence de quantité.

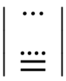
Quelques correspondances entre écriture Maya et écriture décimale sont données dans le tableau ci-dessous :

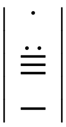


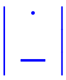
1. Donner la valeur du signe « point » et celle du signe « trait » dans l'écriture de 7 ?
   On a $7 = (5 + 2 \times 1)$. Le point vaut 1 et le trait vaut 5.

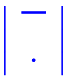
2. Le système maya est un système vigésimal (système qui a pour base 20). Donner l'écriture maya du nombre 21.
   $21 = (1) \times 20 + (1) \times 1$, le nombre s'écrit donc avec un point en haut et un point en bas : 

3. Justifier l'écriture maya du nombre 37.
   $37 = (1) \times 20 + (3 \times 5 + 2) \times 1$, soit une vingtaine en haut et 17 unités (3 traits et 2 points) en bas.

4. Donner l'écriture des deux nombres suivants dans notre système de numération.
   (a)  $(3) \times 20 + (2 \times 5 + 4) \times 1 = 3 \times 20 + 14 \times 1 = 60 + 14 = \underline{74}$.

   (b)  $(1) \times 20^2 + (3 \times 5 + 2) \times 20 + (5) \times 1 = 1 \times 400 + 17 \times 20 + 5 \times 1 = 400 + 340 + 5 = \underline{745}$.

5. (a) $25 = (1) \times 20 + (5) \times 1$ s'écrit 

   (b) $101 = (5) \times 20 + (1) \times 1$ s'écrit 

   (c) Le système de numération maya est qualifié, tout comme le système de numération que nous utilisons, de système positionnel. Expliquer pourquoi.
   Le système maya est un système positionnel, car la valeur de ses « chiffres » de 0 à 20 dépend de leur position dans leur écriture.