1 Limite d'une suite géométrique

L'objectif est de connaître le comportement d'une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n prend de grandes valeurs : on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = ?$

Propriété 1.

Soit q un réel strictement positif.

- Si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Remarque. le cas $q = 1$ est trivial car $1^n = 1$ pour tout n

Exemple 2

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ car $2 > 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,3^n = 0$ car $0,3 < 1$.

Propriété 3.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique positive.

- Si $0 < q < 1$, alors la suite admet 0 comme limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $q > 1$, alors la suite admet une limite infinie : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Rappel. une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q a pour expression : $u_n = u_0 \times q^n$

Exemple 4

On injecte à une patient une dose de 2 cm^3 de médicament. Chaque heure, le volume du médicament dans le sang diminue de 12 %. Pour tout entier n, on note u_n le volume du médicament, en cm^3, présent dans le corps du patient.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 1 - \frac{12}{100} = 0,88$.
$0,88 < 1$, donc, la dose de médicament va diminuer jusqu'à devenir nulle.

Propriété 5.

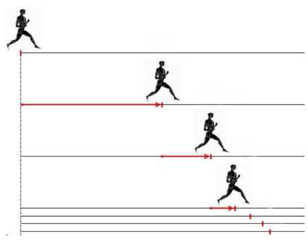
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ de raison $q \neq 1$. On note S_n la somme des $n+1$ termes de la suite.

- Si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{u_0}{1-q}$.
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Rappel. $S_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Le paradoxe d'Achille : un paradoxe de Zénon d'Elée met en scène le Grec Achille pour sa rapidité. Imaginons qu'Achille ait à parcourir 100 m à la vitesse uniforme de 10 m/s. Il lui faut d'abord franchir la moitié de cette distance, puis la moitié de la distance restante, puis la moitié suivante, et ainsi de suite.

Ce processus peut être poursuivi indéfiniment, puisque la longueur restant à parcourir, bien que de plus en plus petite, peut toujours être divisée en deux parties égales. Donc, concluait Zénon, puisque Achille doit franchir un nombre infini d'intervalles finis, il n'atteindra jamais son but.



Remarque. Il faudra 2000 ans pour comprendre ce paradoxe

2 Algorithmes de calcul

Un algorithme est une suite finie d'instructions données dans un certain ordre permettant de résoudre un problème.
Ce mot vient du nom du mathématicien perse Muhammad ibn Musa al-Khuwarizmi (8è siècle après J.C.), surnommé le pere de l'algèbre.

Étant donné une suite géométrique de raison $q \in [0, 1]$, on souhaite mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel la suite est inférieure à un réel a donné.

Exemple 6
On reprend l'exercice 4, on souhaite connaître la « demi-vie » du médicament, c'est à dire le moment où le médicament sera absorbé à 50 %.
On rappelle que pour tout n positif, $u_n = 2 \times 0,88^n$.

```
                  Algorithme Seuil pour une suite géométrique
                  Variable
Variables      {    n : un nombre entier naturel
                    u : un nombre réel
                  Début
Initialisation {    Affecter à n la valeur 0
                    Affecter à u la valeur 2
                    TantQue u est supérieur à 1 Faire
Traitement     {      Affecter à n la valeur n+1
                      Affecter à u la valeur 2×0,88^n
                    FinTantQue
Sortie         {    Afficher n
                  Fin
```

Calculatrice. on peut également utiliser la table de la calculatrice en mode « suite » :

n	u(n)
0	2
1	1.76
2	1.5488
3	1.3629
4	1.1994
5	1.0555
6	.92881

En langage de programmation, on a par exemple :

Calculatrice TI

```
PROGRAM:SEUIL
:0→N
:2→U
:While U>1
:N+1→N
:2*0.88^N→U
:End
:Disp N
```

Algobox

```
▼ VARIABLES
  ├n EST_DU_TYPE NOMBRE
  └u EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  ├n PREND_LA_VALEUR 0
  ├u PREND_LA_VALEUR 2
  ▼ TANT_QUE (u>1) FAIRE
    ├DEBUT_TANT_QUE
    ├n PREND_LA_VALEUR n+1
    ├u PREND_LA_VALEUR 2*pow(0.88,n)
    └FIN_TANT_QUE
  └AFFICHER n
└FIN_ALGORITHME
```

Python

```python
n=0
u=2
while u>1:
    n=n+1
    u=2*pow(0.88,n)
print(n)
```

L'algorithme nous donne un seuil de 6, c'est à dire qu'à partir de 6 heures après l'injection du médicament, il en restera moins de la moitié dans le corps du patient.