Exercice 1 **(France métropolitaine septembre 2014)**

On considère la fonction f définie sur $[\,0,5\,;\,10\,]$ par :

$$f(x) = -x^2 - 4x + 15 + 6\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

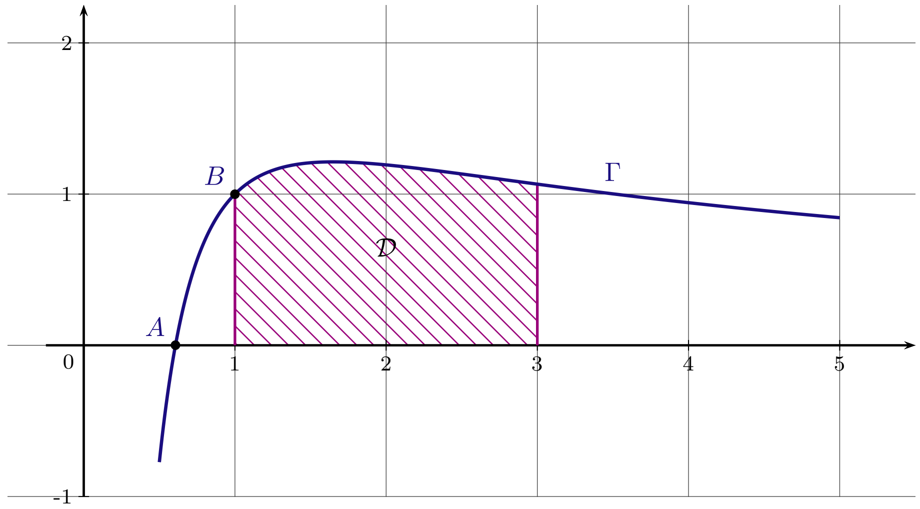
1. Vérifier que $f'(x) = \dfrac{-2x^2 - 4x + 6}{x}$.
2. Étudier le signe de la fonction f' sur $[\,0,5\,;\,10\,]$, en déduire le tableau de variations de f sur $[\,0,5\,;\,10\,]$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[\,0,5\,;\,10\,]$.
   Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} par défaut.
4. On considère la fonction F définie et dérivable sur $[\,0,5\,;\,10\,]$ telle que :
   $$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 9x + 6x\ln(x).$$
   Montrer que F est une primitive de f sur $[\,0,5\,;\,10\,]$.
5. Calculer $I = \displaystyle\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.
   En donner la valeur exacte, puis une valeur approchée au millième.
6. En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[\,1\,;\,3\,]$: en donner une valeur approchée au millième. [1]

Exercice 2 **(Nouvelle Calédonie mars 2015)**

On considère la fonction g, définie et dérivable sur l'intervalle $[\,0,5\,;\,5\,]$, et telle que pour tout nombre réel x, on a :

$$g(x) = \frac{2\ln(x) + 1}{x}.$$

On note g' sa fonction dérivée et Γ sa courbe représentative dans le repère ci-dessous. Soit B le point de Γ d'abscisse 1 ; la droite $(\mathrm{O}B)$ est tangente en B à la courbe Γ.



1. Déterminer les coordonnées exactes du point A, point d'intersection de la courbe Γ avec l'axe des abscisses.
2. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[\,0,5\,;\,5\,]$, on a
   $$g'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^2}.$$
   (b) Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[\,0,5\,;\,5\,]$.
   (c) En déduire les variations de g sur l'intervalle $[\,0,5\,;\,5\,]$.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe Γ au point B d'abscisse 1.
4. (a) On note $\mathcal{D}$ le domaine défini par l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
   Par lecture graphique, encadrer par deux entiers l'aire de $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire.
   (b) On définit la fonction G sur l'intervalle $[\,0,5\,;\,5\,]$ par
   $$G(x) = \ln(x)[\ln(x) + 1].$$
   Montrer que G est une primitive de g sur l'intervalle $[\,0,5\,;\,5\,]$.
   (c) Déterminer l'aire de $\mathcal{D}$ exprimée en unités d'aire.

1. La valeur moyenne d'une fonction sur l'intervalle$[\,a\,,\,b\,]$ est définie par $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.