Exercice 1 (Polynésie 2014)

Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la propagation. Le tableau ci-dessous donne la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient.

Temps en heure	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration en mg/l	1,6	2	1,9	1,6	1,2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4

Ces données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction g définie sur l'intervalle $[\,0\,;\,10\,]$ par $g(t)=\dfrac{4t}{t^2+1}$.
Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en mg/l de l'antibiotique.
Le graphique en annexe 1 représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction g.

1. Par lecture graphique donner sans justification :
   (a) les variations de la fonction g sur $[\,0\,;\,10\,]$;
   (b) la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures ;
   (c) l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à $1,2$ mg/l.
2. (a) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[\,0\,;\,10\,]$ et sa dérivée est g'. Montrer que $g'(t)=\dfrac{4\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}$.
   (b) En utilisant l'expression de $g'(t)$, montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection.
3. On admet que G définie sur $[\,0\,;\,10\,]$ par $G(t)=2\ln\left(t^2+1\right)$ est une primitive de g sur cet intervalle. Quelle est la concentration moyenne de l'antibiotique pendant les 10 premières heures ? Donner la valeur exacte et la valeur arrondie au millième.
4. On définit la CMI (Concentration Minimale Inhibitrice) d'un antibiotique comme étant la concentration au dessus de laquelle les bactéries ne peuvent plus se multiplier.
   La CMI de l'antibiotique injecté est $1,2$ mg/l.
   Déterminer, par le calcul, le temps d'antibiotique utile c'est-à-dire la durée pendant laquelle la concentration de l'antibiotique étudié est supérieure à sa CMI.

Exercice 2 (Pondichéry 2014)

Un artisan glacier commercialise des « sorbets bio ». Il peut en produire entre 0 et 300 litres par semaine. Cette production est vendue dans sa totalité. Le coût total de fabrication est modélisé par la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $I=]\,0\,;\,3\,]$ par $f(x)=10x^2-20x\ln x$. Lorsque x représente le nombre de centaines de litres de sorbet, $f(x)$ est le coût total de fabrication en centaines d'euros. La recette, en centaines d'euros, est donnée par une fonction r définie sur I.

Partie a : la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f et la droite D représentative de la fonction linéaire r sont données en annexe 2.

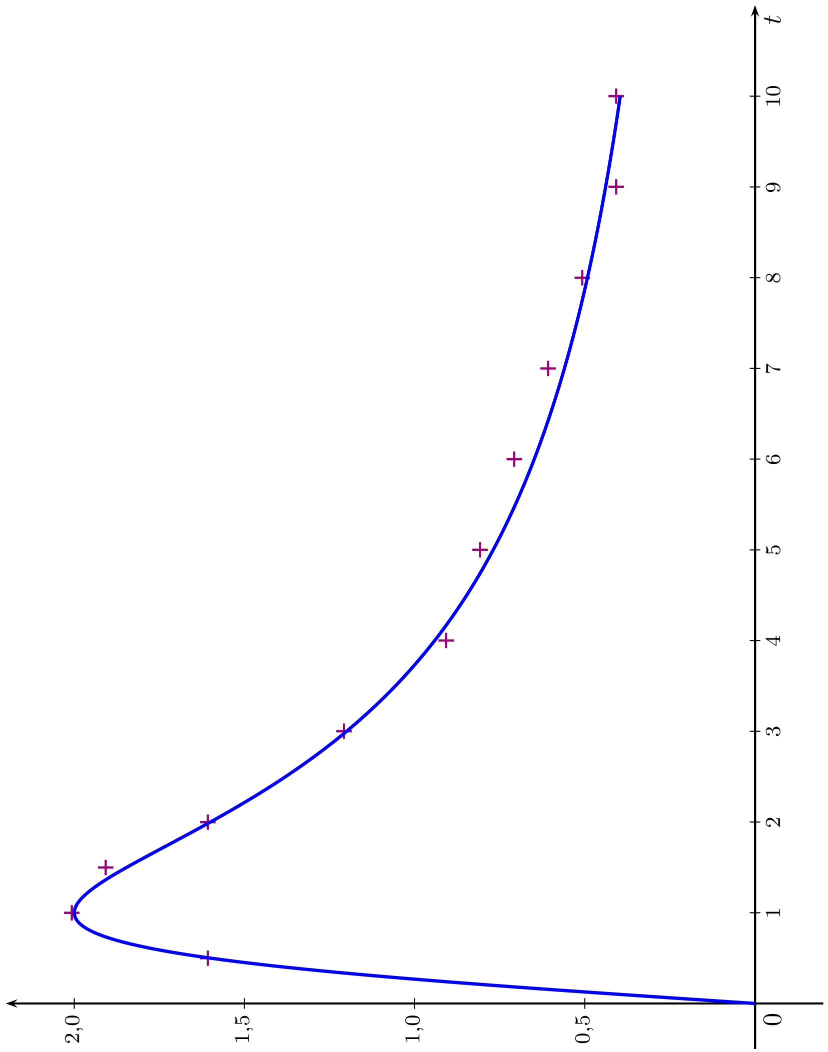
1. Répondre aux questions suivantes par lecture graphique et sans justification.
   (a) Donner le prix de vente en euros de 100 litres de sorbet.
   (b) Donner l'expression de $r(x)$ en fonction de x.
   (c) Combien l'artisan doit-il produire au minimum de litres de sorbet pour que l'entreprise dégage un bénéfice ?
2. On admet que $\displaystyle\int_1^3 20x\ln x\,\mathrm{d}x=90\ln 3-40$.
   (a) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) En déduire, pour une production comprise entre 100 et 300 litres, la valeur moyenne (arrondie à l'euro) du coût total de production.

Partie b : on note $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'artisan pour la vente de x centaines de litres de sorbet produits. D'après les données précédentes, pour tout x de l'intervalle $[\,1\,;\,3\,]$, on a $B(x)=-10x^2+10x+20x\ln x$ où $B(x)$ est exprimé en centaines d'euros.

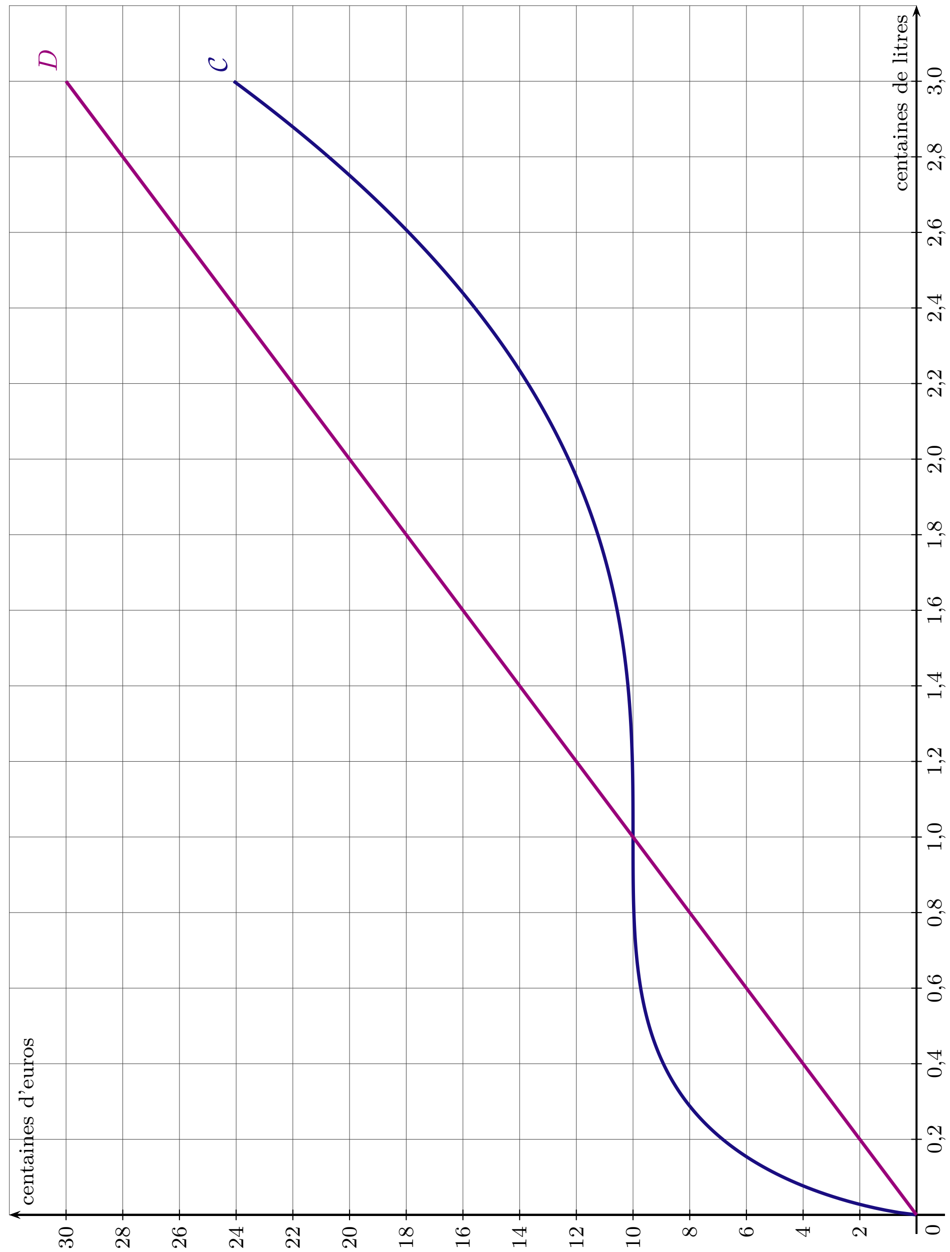
1. On note B' la fonction dérivée de la fonction B. Montrer que, pour tout nombre x de l'intervalle $[\,1\,;\,3\,]$, on a $B'(x)=-20x+20\ln x+30$.
2. On donne le tableau de variation de la fonction dérivée B' sur $[\,1\,;\,3\,]$.

x	1		3
$B'(x)$	$B'(1)$	$\searrow$	$B'(3)$

   (a) Montrer que l'équation $B'(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1;3]$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2}.
   (b) En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[\,1\,;\,3\,]$ puis dresser le tableau de variation de la fonction B sur ce même intervalle.
3. L'artisan a décidé de maintenir sa production dans les mêmes conditions s'il peut atteindre un bénéfice d'au moins 850 euros. Est-ce envisageable ?



t
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0,5
1,0
1,5
2,0



$\mathcal{D}$
$\mathcal{C}$
centaines de litres
centaines d'euros
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,2
2,4
2,6
2,8
3,0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30