1 Primitive d'une fonction continue

Définition 1.

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[\,a\,;\,b\,]$. On appelle **primitive** de f sur $[\,a\,;\,b\,]$ toute fonction F continue et dérivable sur $[\,a\,;\,b\,]$ vérifiant

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in [\,a\,;\,b\,]$$

Remarque. on ne parle pas de *la* primitive de mais *des* primitives d'une fonction f

Exemple 2

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$.

- La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3$ est une primitive de f.
- La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x^3 + 2$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Remarque. pour montrer que F est une primitive de f, il faut montrer que $F'(x) = f(x)$

Théorème 3.

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

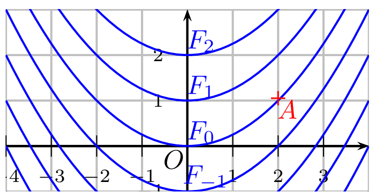
Proriété 4.

Soit f une fonction continue sur $[\,a\,;\,b\,]$ dont une primitive est F alors :

- les primitives de f sont les fonctions G telles que $G(x) = F(x) + c$;
- si de plus on impose la condition $F(x_0) = y_0$, la primitive est unique.

Exemple 5

- Les fonctions $F_0(x) = \dfrac{1}{4}x^2$, $F_1(x) = \dfrac{1}{4}x^2+1$, $F_2(x) = \dfrac{1}{4}x^2+2$, ... , $F_c(x) = \dfrac{1}{4}x^2+c$ avec $c \in \mathbb{R}$ sont toutes des primitives de la fonctions $f : x \mapsto \dfrac{x}{2}$;
- il existe une unique primitive F de f vérifiant $F(2) = 1$: il s'agit de F_0.



2 Primitives des fonctions usuelles

La lecture du tableau des primitives se fait en lisant celui des dérivées « à l'envers ». Les fonctions suivantes sont continues sur tout intervalle de I.

$f(x)$	a	x	x^n	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	e^x
$F(x)$	ax	$\dfrac{x^2}{2}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	e^x
I	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$

Remarque. ce tableau donne une primitive de f, pour obtenir toutes les primitives il faut ajouter une constante à F

Proriété 6.

Soient u et v des fonctions continues sur $[\,a\,;\,b\,]$, de primitives U et V et k une constante réelle, alors

- une primitive de la fonction $u+v$ est la fonction $U+V$;
- une primitive de la fonction $k\times u$ est la fonction $k\times U$.

Exemple 7

- Une primitive de la fonction $f : x \mapsto x^2-5x+3$ est $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-5\times\dfrac{x^2}{2}+3x$.
- Une primitive de la fonction $g : x \mapsto 2(e^x-3)$ est $G(x)=2(e^x-3x)$.

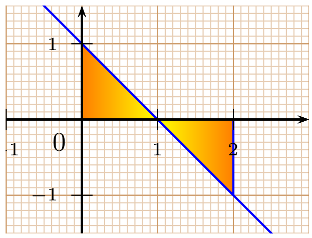
3 Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Définition 8.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $\mathrm{I}=[\,a;b\,]$ dont F est une primitive. On appelle **intégrale de f de a à b** le réel défini par

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

Remarque. dans ce cas, l'intégrale ne correspond pas forcément à l'aire du domaine



Exemple 9

Soit $f(x)=1-x$, alors $F(x)=x-\dfrac{x^2}{2}$ et $\displaystyle\int_0^2 1-x\ \mathrm{d}x = F(2)-F(0)=0$.

Définition 10.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[\,a\,;b\,]$, on appelle **valeur moyenne** de f sur $[\,a\,;b\,]$ le nombre réel μ défini par :

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Interprétation graphique si f est positive sur $[\,a\,;b\,]$: le réel μ est le réel pour lequel l'aire délimitée par la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est égale à l'aire du rectangle dont les côtés ont pour mesures $b-a$ et μ.