1 Définition

Définition 1.

Soient a et b deux réels. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme u_0 définie par $u_{n+1} = au_n + b$ est une suite **arithmético-géométrique**.

Remarque.

si $a = 1$ la suite est arithmétique, si $b = 0$ la suite est géométrique

2 Étude d'une suite arithmético-géométrique

- M. Payet dépose 5 000 € sur un compte rémunéré au taux annuel de 2,5 % et choisit d'y ajouter à la fin de chaque année la somme de 2 000 €.
  On note u_n le montant, en euros, du capital acquis au bout de n années.

données de l'énoncé

- Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'intérêt de $2,5\,\%$ est de $1+\dfrac{2,5}{100} = 1,025$. De plus, 2 000 € sont ajoutés chaque début d'année, d'où : pour tout entier n, $u_{n+1} = 1,025 \times u_n + 2\,000$ et $u_0 = 5\,000$.

u_{n+1} en fonction de u_n

- Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier n, par $v_n = u_n + 80\,000$.
  On va montrer que v_n est une suite géométrique. Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 80\,000 \\ &= 1,025\,u_n + 2\,000 + 80\,000 \\ &= 1,025(v_n - 80\,000) + 82\,000 \\ &= 1,025\,v_n - 82\,000 + 82\,000 \\ v_{n+1} &= 1,025\,v_n \end{aligned}$$

  $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1,025$ et de premier terme $v_0 = 5\,000 + 80\,000 = 85\,000$.

suite géométrique v_n

- Pour tout entier n, $v_n = v_0 \times q^n = 85\,000 \times 1,025^n$.

v_n en fonction de n

- Pour tout entier n, $u_n = v_n - 80\,000 = 85\,000 \times 1,025^n - 80\,000$.

u_n en fonction de n

- $q = 1,025 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,025^n = +\infty$.
  Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} 85\,000 \times 1,025^n - 80\,000 = +\infty$.

limite de la suite u_n

- M. Payet souhaite s'acheter une voiture à 15 000 €.
  Il se demande combien d'années seront nécessaires pour que le montant du capital disponible dépasse 15 000 €.
  La calculatrice nous donne (programme ou table de valeurs) $n = 5$; donc il faudra 5 ans à M. Payet pour s'offrir sa voiture.

seuil