Exercice 1 **(Centres Érangers 2014)**

Partie a : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2-1}$.
$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan.
On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f.

1. (a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (2x^2+1)\mathrm{e}^{x^2-1}$.
   (b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que pour tout réel x, $f''(x) = 2x(2x^2+3)\mathrm{e}^{x^2-1}$.
   Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x(1-\mathrm{e}^{x^2-1})$.
   (a) Justifier que l'inéquation $1-\mathrm{e}^{x^2-1} \geqslant 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
   (b) Déterminer le signe de $h(x)$ sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
   (c) En remarquant que pour tout réel x, on a l'égalité $h(x) = x - f(x)$, déduire de la question précédente la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite D d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[\,0\,;\,1\,]$.
4. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-1}$. H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$. Calculer la valeur exacte de $I = \displaystyle\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x$.

Partie b : Applications

Sur le graphique pas suivant, sont tracées sur l'intervalle $[\,0\,;\,1\,]$:

— la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction étudiée en partie A ;
— la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction définie par $g(x) = x^3$;
— la droite D d'équation $y = x$.

C_f et C_g illustrent ici la répartition des salaires dans deux entreprises F et G :

— sur l'axe des abscisses, x représente la proportion des employés ayant les salaires les plus fiables par rapport à l'effectif total de l'entreprise ;
— sur l'axe des ordonnées, $f(x)$ et $g(x)$ représentent pour chaque entreprise la proportion de la masse salariale (c'est-à-dire la somme de tous les salaires) correspondante.

Par exemple : le point $M(0,5;0,125)$ *est un point appartenant à la courbe* C_g*. Pour l'entreprise G cela se traduit de la façon suivante : si on classe les employés par revenu croissant le total des salaires de la première moitié représente* $12,5\%$ *de la masse salariale.*

1. Calculer le pourcentage de la masse salariale détenue par 80% des salariés ayant les salaires les plus faibles dans l'entreprise F.
   On donnera une valeur du résultat arrondie à l'unité.
2. On note A_f l'aire du domaine délimité par la droite D, la courbe C_f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
   On appelle indice de Gini associé à la fonction f, le nombre réel noté I_f et défini par $I_f = 2 \times A_f$.
   (a) Montrer que $I_f = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
   (b) On admet que, plus l'indice de Gini est petit, plus la répartition des salaires dans l'entreprise est égalitaire. Déterminer, en justifiant, l'entreprise pour laquelle la distribution des salaires est la plus égalitaire.

Exercice 2 **(Asie 2013)**

La courbe $\mathcal{C}_f$ page suivante est la représentation graphique d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels.
Elle passe par les points $A(1;4\mathrm{e}^{0,5})$, $B(0;5)$ et $C(5;0)$. Le point $D(-3;0)$ appartient à la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A. On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

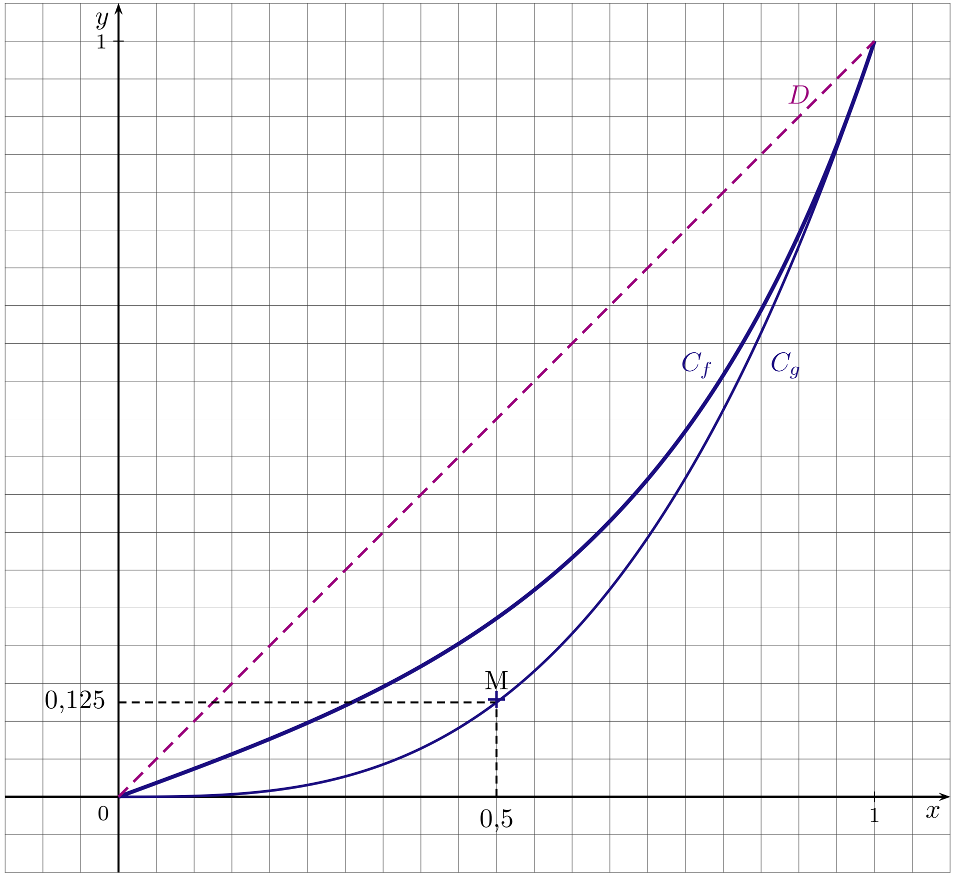
Partie a - PAR LECTURE GRAPHIQUE

1. Quel est le signe de $f'(1)$? Justifier.
2. Que semble représenter le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
3. (a) Préciser un domaine du plan dont l'aire est égale à $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ u.a.
   (b) Recopier sur votre copie le seul encadrement qui convient parmi :
   $0 \leqslant I \leqslant 9$ $\quad$ $10 \leqslant I \leqslant 12$ $\quad$ $20 \leqslant I \leqslant 24$

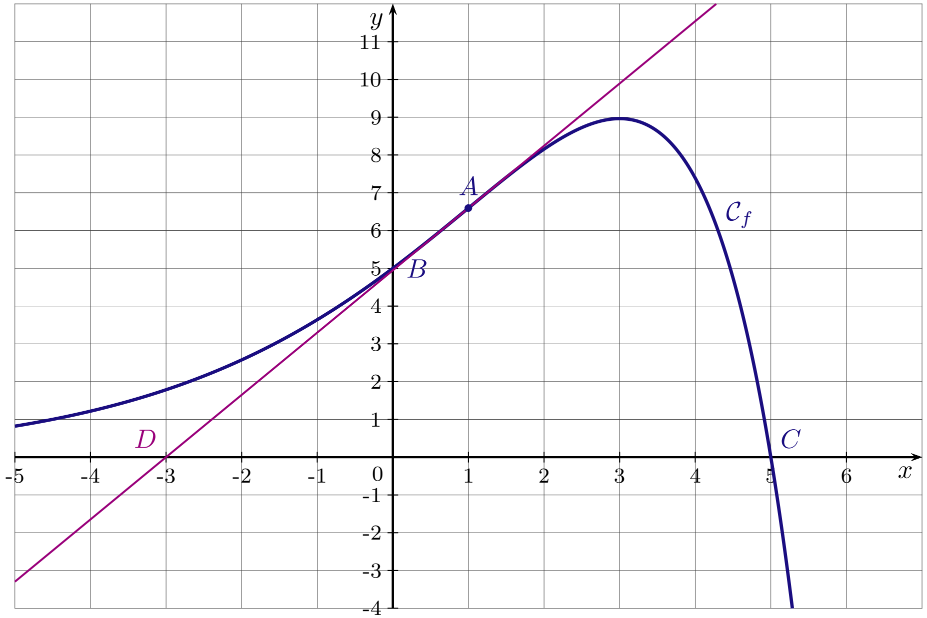
Partie b - PAR LE CALCUL

On admet que pour tout réel x, $f(x) = (-x+5)\mathrm{e}^{0,5x}$ et $f'(x) = (1,5-0,5x)\mathrm{e}^{0,5x}$.
On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Vérifier que, pour tout réel x, $f''(x) = 0,25(-x+1)\mathrm{e}^{0,5x}$.
   (b) Résoudre l'équation $f''(x) = 0$. Montrer que le point A est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
   (c) Sur quel intervalle la fonction f est-elle convexe ?Justifier.
2. Soit F la fonction définie, pour tout réel x, par $F(x) = (-2x+14)\mathrm{e}^{0,5x}$. On admet que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   Calculer $I = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.



y
1
D
C_f
C_g
M
0,125
0
0,5
1
x



y
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
A
B
$\mathcal{C}_f$
D
C
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
x