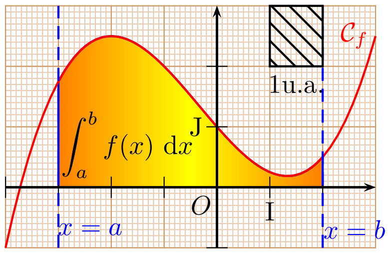
1 Intégrale d'une fonction continue positive

Définition 1.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $\mathrm{I} = [\,a\,;\,b\,]$.
On appelle **intégrale de** f **sur** I l'aire du domaine délimité par la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On note alors cette intégrale :

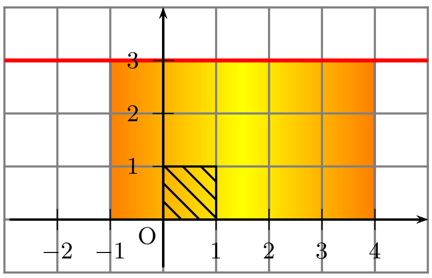
$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Cette aire est exprimée en unités d'aire (u.a.), qui correspond à l'aire du rectangle de côtés OI et OJ.

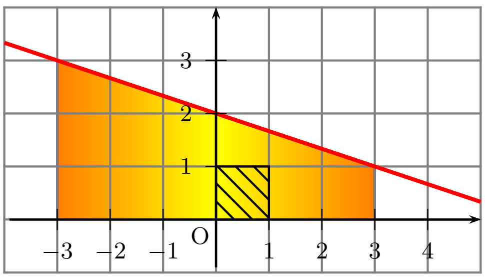


Remarque.
le x de « dx » est la variable par rapport à laquelle on effectue les calculs

Exemple 2



$$\int_{-1}^{4} 3\ \mathrm{d}x = 3 \times 5 = 15 \text{ u.a.}$$



$$\int_{-3}^{3} \left(-\frac{1}{3}x + 2\right)\ \mathrm{d}x = \frac{(1+3)\times 6}{2} = 12 \text{ u.a.}$$

Théorème 3.

- Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $\mathrm{I} = [\,a\,;\,b\,]$, la fonction F définie sur $[\,a\,;\,b\,]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable de dérivée f : pour tout réel $x \in [\,a\,;\,b\,], F'(x) = f(x)$.
- Pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$, il suffit de connaître une fonction F dérivable de dérivée f et on a $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Remarque.
une telle fonction F s'appelle une primitive de f (voir S13)

Exemple 4

Calcul de $\displaystyle\int_{-1}^{4} 3\ \mathrm{d}x$:

$$f(x) = 3$$
$$F(x) = 3x$$
$$\int_{-1}^{4} 3\ \mathrm{d}x = F(4) - F(-1)$$
$$= 12 - (-3) = 15.$$

Calcul de $\displaystyle\int_{0}^{5} (2x+1)\ \mathrm{d}x$:

$$f(x) = 2x + 1$$
$$F(x) = x^2 + x$$
$$\int_{0}^{5} (2x+1)\ \mathrm{d}x = F(5) - F(0)$$
$$= 30 - 0 = 30.$$

Calculatrice.
avec la TI 82 fr :
$\boxed{\text{math}}$ puis MATH puis 9
`intégrFonct(3,x,-1,4)`

2 Propriétés de l'intégrale

Proriété 5.

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[\,a\,;\,b\,]$ et λ un réel positif, alors :

- $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x\,;$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\ \mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x.$

Remarque. propriétés de linéarité (addition et multiplication par un scalaire)

Ces propriétés permetent en pratique de ramener le calcul d'une intégrale d'une fonction complexe à une succession d'intégrations de fonctions plus élémentaires.

Proriété 6.

Soient f et g des fonctions continues et positives sur $[\,a\,;\,b\,]$, alors :

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq 0\,;$
- si pour tout $x\in[\,a\,;\,b\,]$, $f(x)\leq g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$

Remarque. propriétés de positivité et relation d'ordre

Proriété 7.

Soit f une fonction continue et positive sur $[\,a\,;\,b\,]$ et $c\in[\,a\,;\,b\,]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Remarque. relation de Chasles, mathématicien français (1793 -1880)

Interprétation graphique :